Задачи экзамена по курсу ``Вероятностные основы понятия невероятного"

декабрь 2011 года

Решения экзамена можно оставлять на вахте в НМУ для Раскина, передавать мне лично, найдя в НМУ или в МГУ, или посылать по электронной почте raskin@mccme.ru Экзамен проходит две недели с 01.12.2011. В понедельник, 19.12.2011, я планирую утром взять на вахте и найти в почте последние сданные работы.

Просьба выбирать задачи так, чтобы можно было увидеть применение разных частей курса.

Предупреждение: среди задач есть умышленно вставленные очень трудные (которые я полностью решать не умею и, возможно, за две недели их решить нельзя). Задачи не упорядочены ни по какому разумному правилу.

Пункты одной задачи не обязательно делать все сразу (и даже по порядку). Неполные с точки зрения вычислений решения тоже будут оцениваться (то есть найти, но не решить рекуррентное соотношение --- это лучше, чем не записывать задачу). Сдача работы до срока не лишает права сдавать дополнительно записанные задачи (в том числе, исправленные решения уже сданных) в течении оставшегося времени.

**1.** Одновременно бросается три симметричных игральных кубика. Найдите условную вероятность того, что сумма выпавших очков меньше $15$ при условии, что она больше $5$.

**2.** Одновременно бросается три симметричных игральных кубика. Найдите условное математическое ожидание максимального выпавшего значения при условии минимального выпавшего значения.

**3.** В колоде карт два пиковых туза и восемь пиковых дам. Колоду перетасовали. Найдите условное математическое ожидание номера второго туза в колоде при условии номера первого (первым считаем туз, который выше лежит в колоде).

**4.** В контрольной шесть задач. Студент, подготовившийся к контрольной, решает каждую из них с вероятностью $\frac{4}{5}$. Студент, не готовившийся к контрольной, решает каждую из них с вероятностью $\frac{2}{5}$. Пятёрка ставится за пять или шесть задач, двойка ставится за одну или ноль задач. Пусть студент готовится к контрольной с вероятностью $\frac{3}{4}$ и не готовится с вероятностью $\frac{1}{4}$. Чему равна условная вероятность, что он готовился к контрольной, при условии, что он получил за неё пятёрку?

**5.** Имеется цепочка независимых бросаний монетки с вероятностью выпадения орла $p$. Для получения случайной последовательности нулей и единиц с равными вероятностями нуля и единицы используется следующий приём: монетка бросается два раза подряд, а потом мы пишем результат первого подбрасывания, если результаты различны. Иначе мы ничего не пишем и продолжаем подбрасывать монетку.

а) Какую доли энтропии мы при этом извлекаем из последовательности? Точнее говоря, пусть мы хотим получить $N$ случайных битов; тогда может произойти счётное число разных событий (последовательностей результатов бросаний). Надо найти предел отношения энтропии распределения входов к энтропии распределения выходов при больших $N$ в зависимости от $p$.

б) Можно ли построить способ получения последовательности независимых равновероятных нулей и единиц, не зависящий от значения $p$, с лучшей долей использования энтропии для хотя бы одного значения $0 < p < 1$?

**6.** Колоду из 52 карт упорядочивают по старшинству и по мастям, после чего 3 раза случайно выбирают пару соседних карт и меняют их местами. Найти энтропию распределения результата.

**7.** Три игрока одновременно выбирают одно из двух действий. Если одно из действий выбрал ровно один игрок, то он получает полезность 1. Остальные игроки (или все трое) получают 0.

а) Найти строго доминируемые и доминируемые стратегии, чистые и смешанные равновесия Нэша.

б) Пусть есть четвёртый игрок, выигрыш которого равен сумме выигрышей первых трёх. Пусть он может перед началом раунда что угодно объявить, а после этого первые три игрока делают, что сочтут нужным. Найти чистые и смешанные равновесия Нэша. Будут ли они учтойчивы к ошибкам?

**8.** Есть полное двоичное дерево глубины $N$ (вариант: $N = 4$). Игроки по очереди двигают фишку вниз по дереву из корня. На каждом ходу после хода игроков случайно выбирается один из достижимых листьев, где ещё не написаны выигрыши (если такие есть), после чего в ней случайно и равновероятно ставится пара выигрышей $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$ или $(-1, -1)$. Найти равновесия Нэша или равновесия Нэша, совершенные на подыграх --- по желанию.

**9.** Каждая грань кубика разбита на четыре равных квадрата. Одна из клеток случайным образом отмечена как исходная. Фишка ходит по этим 24 клеткам, случайно выбирая одну из соседних на каждом шагу. Мы можем поставить сколько угодно ловушек в клетки. При попадании в ловушку, фишка переносится в исходную клетку, нам сообщают, сколько ходов она сделала и в какую ловушку попала, после чего процесс блуждания продолжается. После каждого попадания в ловушку мы должны сделать предположение, где исходная клетка.

При скольких ловушках можно добиться, что вероятность правильного ответа на $n$-м шаге стремится к $1$? Докажите как можно лучшую оценку сверху и снизу (не обязательно равные).

**10.** При бросании монеты получилась последовательность 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0 . Следует ли отбросить гипотезу, что на чётных шагах вероятность выпадения $1$ равна $\frac{1}{3}$, а на нечётных равна $\frac{1}{2}$ в пользу альтернативной, что вероятность всегда $\frac{1}{2}$?

**11.** Каждый из трёх игроков знает своё случайное число от 1 до 128. Он говорит, сколько кому битов передаёт, и какие биты передаёт (выбор производится одновременно). При передаче бит меняется с вероятностью $\frac{1}{4}$. Передача бита стоит 1. В конце каждый получатель пытается угадать два переданных числа, в случае успеха угадывания оба игрока (отправитель и получатель) получают по +20. Найдите равновесия Нэша.

Экзаменатор (Раскин М. А.)