Рассмотрим произвольное множество исходов, $\Omega$, вероятностное пространство на нём и событие в нём $B$, имеющее положительную вероятность. Тогда можно считать, что $B$ само является вероятностным пространством, так как условные вероятности при условии $B$ обладают всеми свойствами вероятностей. Если у нас есть случайная величина $\xi$, то есть функция на исходах, то можно рассмотреть её ограничение на множество исходов $B$ как случайную величину. Её математическое ожидание назовём математическим ожиданием $\xi$ при условии $B$.

Далее, пусть у нас есть множество событий, имеющих положительную вероятность, $\{B_1, \ldots, B_n, \ldots\}$. Тогда можно для каждого события из множества найти математическое ожидание $\xi$ при условии этого события. Назовём *условным математическим ожиданием* величины $\xi$ при условии множества событий $\{B_1, \ldots, B_n, \ldots\}$ отображение, переводящее $B_k$ в математическое ожидание $\xi$ при условии $B_k$.

Наибольший интерес для нас сейчас представляет случай, когда $B_1, \ldots, B_n, \ldots$ попарно не пересекаются. В этом случае условное математическое ожидание является функцией не только на событиях, но и на самих исходах (никакому исходу не поставлено в соответствие два разных значения), определённой на каком-то событии, то есть случайной величиной.

Определим также для двух случайных величин $\xi$ и $\eta$ условное математическое ожидание $\xi$ при условии $\eta$. Рассмотрим $B$ --- множество событий вида ``$\eta$ принимает значение $x$''. По определению, $M(\xi|\eta) = M(\xi|B)$.

Как пример можно привести условное математическое ожидание среднего трёх оценок при условии первой для школьника, который равновероятно и независимо каждый раз получает 3, 4, или 5. Элементарных событий здесь будет 27. Так как независимо от первой оценки математическое ожидание суммы двух оставшихся равно 8, то это случайная величина равная $3\frac{2}{3}$ на девяти элементарных событиях, где первая оценка 3, 4 на девяти элементарных событиях, где первая оценка 4, и $4\frac{1}{3}$ на девяти событиях, где первая оценка 5.

Основные свойства условного математического ожидания: $M(\xi|\xi) = \xi$, так как усреднение происходит по событиям, при условии которых $\xi$ является константой. Кроме того, $M(\xi|\eta) = M\xi$ при независимых $\xi$ и $\eta$, так как фиксация значения, принятого $\eta$, не меняет вероятности принятия значений $\xi$. В частности, в качестве $\eta$ можно взять константу.

Кроме того, $M(\xi+\zeta|\eta) = M(\xi|\eta)+M(\zeta|\eta)$ по тем же причинам, что и для обычного математического ожидания.

Если у нас есть разбиение множества исходов на события положительной вероятности $B_1, \ldots, B_n$, а событие $B$ является объединением каких-то из этих событий, то $M(\xi|B) = M(M(\xi|\{B_1, \ldots, B_n\})|B)$. Чтобы доказать это, надо рассмотреть математическое ожидание как сумму по элементарным событиям в левой части и как сумму по $B_1, \ldots, B_n$ в правой части. После раскрытия скобок в правой части заметим, что $P(B_j)P(\sigma|B_j) = P(\sigma)$.

Приведём пример задачи, в которой ответ удобно определять через УМО. Пусть есть случайная величина $\xi$, которую мы хотим оценить по результатам эксперимента, и случайная величина $\eta$, которую нам сообщают. При этом будем считать, что мы сообщаем как оценку $\xi$ величину $f(\eta)$ и выбираем функцию $f$ для минимизации $M(f(\eta)-\xi)^2$.

Найдём, какое $y$ нам выгодно сообщить при условии $\eta = x$. Вычислим

$$M((y-\xi)^2|\eta = x) = M(y^2 - 2y\xi + \xi^2|\eta = x) = y^2 - 2yM(\xi|\eta = x) + M(\xi^2|\eta = x) =$$
$$= (y - M(\xi|\eta = x))^2 + M(\xi^2|\eta = x) - M^2(\xi|\eta = x) = (y - M(\xi|\eta = x))^2 + D(\xi|\eta = x)$$

Ясно, что минимум достигается при $y = M(\xi|\eta = x)$. Выбирая таким образом значения $f$, получаем, что при наилучшей $f$ будет выполнено $f(\eta) = M(\xi|\eta)$.

Можно ещё попытаться определить условное математическое ожидание в том же духе, в каком оно определяется в полной общности. Пусть у нас есть множество событий $B$, которое вместе с каждыми двумя событиями содержит их объединение, пересечение и разность (а также содержит достоверное событие). Условным математическим ожиданием $\xi$ при условии $B$ называется случайная величина $\zeta$, такая что:

1) для любого отрезка $[x; y]$ событие $\zeta \in [x; y]$ лежит в $B$;

2) для любого события $B_\alpha \in B$ математическое ожидание $\zeta$ при условии $B_\alpha$ равно математическому ожиданию $\xi$ при условии $B_\alpha$.

Сравним это с нашим определением. Пусть дано разбиение $A_1, \ldots, A_n$. В качестве $B$ возьмём набор всевозможных объединений наборов множеств из разбиения $A$.

Ясно, что так как $M(\xi|A)$ постоянно на каждом $A_j$, то условие принадлежности значения этой случайной величины отрезку выражается как объединение событий из $A$. Второе условие мы уже проверяли ранее.

Если у нас есть случайная величина, являющаяся условным математическим ожиданием по новому определению, то она должна быть константой на каждом $A_j$, так как иначе условие принадлежности значения УМО отрезку, включающему только часть значений, принимаемых на $A_j$, не будет выражаться как объединение событий из $A$. Но тогда условие 2) для событий $A_j$ определяет однозначно значение УМО на каждом исходе.