Мы определили равновесие Нэша. Посмотрим, хорошо ли оно применимо к играм в развёрнутой форме.

Рассмотрим следующую игру: есть монополист и есть потенциальный конкурент. Конкурент может отказаться от данного рынка (выигрыши по 0), или включиться в борьбу. В последнем случае монополист может оптимизировать свою прибыль (потеряв 1), и это принесёт конкуренту выигрыш 1. Или же монополист может продавать себе в убыток и понести ущерб 2, нанеся конкуренту ущерб 1. Игра не повторяется.

С одной стороны, есть равновесие Нэша: монополист собирается пойти на ценовую войну, а конкурент не решается попробовать захватить рынок. С другой стороны, если конкурент уже попробовал включиться в борьбу, то монополисту невыгодно выполнять свою угрозу. Поэтому во многих ситуациях такие угрозы совершенно неправдоподобны. В общем случае разумно ожидать, что не обязывающие формально обещания действовать в некоторых ситуациях себе в ущерб являются блефом.

Определение 1. Равновесие Нэша в игре в развёрнутой форме называется совершенным на подыграх, если оно (точнее, его ограничение) является равновесием Нэша в любой игре, полученной из исходной игры заменой начальной вершины на какую-то другую, достижимую из неё (другими словами, в игре, которая играется как окончание исходной после нескольких ходов).

Замечание 1. Для игр с неполной информацией при заданном наборе стратегий можно для каждого информационного множества построить условное распределение вероятностей на нём (при условии, что игроку вообще придётся делать ход в этом информационном множестве) и требовать, чтобы ни одному из игроков не было выгодно менять стратегию в игре, полученной заменой всего предыдущего дерева на один ход природы с таким же распределением результатов.

Это определение позволяет легко сказать, почему иногда подчёркивается, что несоразмерный ответный удар может произойти автоматически --- неправдоподобна угроза его нанести, так как это может быть не в интересах наносящей стороны; но так как ситуация, в которой он понадобится, является маловероятной (во всяком случае, в это хочется верить), то построение неотключаемой системы, которая нанесёт его автоматически, вполне оправданно, и превращает очевидный блеф в очень правдоподобную угрозу.

Другое определение ``хорошего'' равновесия Нэша можно дать и для игр в нормальной форме. Объясним сначала ситуацию, в которой это понятие возникает.

Рассмотрим следующую игру:

$$\begin{array}{cc} 4,4 & 4,-100 \\ -1,4 & 0,0 \end{array}$$

В этой игре есть два равновесия Нэша (левый верхний и правый нижний углы). Но представим, что игроки очень редко, но совершают ошибки. Тогда с точки зрения второго опасно использовать первую стратегию и лучше перейти на вторую, которая никогда не хуже при фиксированном ходе первого. Так же мог бы рассуждать и первый.

Формально это определяется так: Стратегия называется вполне смешанной, если все чистые стратегии входят в неё с положительными вероятностями. Равновесие Нэша называется равновесием дрожащей руки, если существует последовательность наборов вполне смешанных стратегий, сходящаяся к равновесию, такая что входящие в равновесие стратегии являются неулучшаемыми ответами на каждый из наборов в последовательности.

Заметим, что эта последовательность может быть устроена сложнее, чем просто приписывание равных вероятностей всем неиспользуемым вариантам.

$$\begin{array}{ccc} 1,1 & 1,0 & 1,-100 \\ 0,1 & 0,0 & -0.1,-100.1 \\ -100,1 & -100.1,-0.1 & -5,-5 \end{array}$$

В этой игре равновесие в левом верхнем углу устойчиво, так как является оптимальным ответом на набор $1,\varepsilon,\varepsilon^2$ для каждого игрока. Но заметим, что против $1,\varepsilon,\varepsilon$ это оптимальным ответом не является.

Мы определили равновесие Нэша и знаем, что если вероятностные стратегии запрещены, то его может не быть в игре в нормальной форме. А всегда ли оно есть в смешанных стратегиях? Ответ на этот вопрос помогает дать теорема Какутани.

Теорема Какутани Пусть X --- выпуклый компакт (таким образом, X должно быть вложено естественным образом в векторное пространство с топологией). Пусть f --- отображение из X во множество его подмножеств, такое, что образ каждой точки --- выпуклый компакт, а его ``график'' замкнут. Другими словами, f можно считать непрерывным многозначным отображением. Тогда у f есть неподвижная точка, то есть $x : x \in f(x)$.

Это теорема топологическая, поэтому доказывать мы её не будем. Впрочем, можно посмотреть внимательно на её формулировку.

Если f было бы однозначным отображением, то это была бы теорема Брауэра (отображение шара в себя имеет неподвижную точку).

Можно посмотреть на условия и понять, что все они существенны. Если X невыпукло, то можно взять окружность и её поворот на 90 градусов. Если X не компактно, можно взять интервал и сжать его в два раза к одному из концов. Некомпактным образ одной точки не может быть из-за замкнутости графика, а если график не замкнут, то можно взять отрезок $[0;1]$ и перевести левую половину (с $\frac{1}{2}$ вместе) в 0, а правую (уже без середины) в 1. Если же отказаться от выпуклости образа точки, то можно взять то же отображение, но перевести середину в обе точки --- и в 0, и в 1.

Кроме того, естественное исправление проблем (переход от круга к окружности, добавление концов к интервалу, добавление всего отрезка как образа середины) создаёт неподвижные точки самым очевидным способом.

Теперь покажем, как это связано с существованием равновесий Нэша. Они существуют, если множества, из которого игроки выбирают стратегии --- выпуклые компакты, функция выигрыша одного игрока от его хода всегда достигает максимума на выпуклом компакте (при любом фиксированном наборе стратегий других игроков) и функция выигрышей (для всех игроков сразу) непрерывна. Подробно мы разберём доказательство для случая смешанных стратеги при конечном числе детерминированных.

Теорема 1. (Теорема Нэша) В игре с конечным числом игроков и стратегий у каждого из них есть смешанное равновесие Нэша.

Доказательство 1. Применим теорему Какутани. Каждый игрок задаёт набор вероятностей для своих стратегий. Такие наборы образуют выпуклый компакт, а именно симплекс. Полный набор стратегий игроков выбирается из произведения этих симплексов --- выпуклый компакт. Отображение f действует в декартово произведение симплексов, и образ каждой точки зададим как декартово произведение. В симплексе, соответствующем данному игроку, выделим множество всех стратегий, дающих максимальную прибыль при данном поведении остальных игроков. Это множество --- симплекс с вершинами в оптимальных чистых стратегиях. После декартова произведения получим, что каждую точку отобразили в выпуклый компакт --- произведение симплексов, возможно, состоящих из одной точки. Замкнутость графика легко проверяется (у нас есть почти явная формула). Неподвижная точка даст набор стратегий, такой что множество оптимальных стратегий каждого игрока включает текущую, то есть равновесие Нэша, что и требовалось.

Напоследок покажем, что дилемма заключённых с ситуацией, в которой двое минимизирующих свой выигрыш игроков получают (в равновесии) больше, чем двое максимизирующих, не является пределом обращения устремлений игроков против них.

Определение 2. Рассмотрим симметричную игру, заданную следующей таблицей:

$$\begin{array}{cccc} 8,8 & 6,16 & 5,2 & 7,10 \\ 16,6 & 15,15 & 13,4 & 14,12 \\ 2,5 & 4,13 & 3,3 & 1,11 \\ 10,7 & 12,14 & 11,1 & 9,9 \end{array}$$

Игроков два, первый выбирает столбец, второй строку. Первое число в клетке задаёт выигрыш первого, второе число --- выигрыш второго. Будем называть эту игру ``сотрудничество''. Причины этого ясны из свойств равновесий Нэша в ней.

Пусть эгоисты максимизируют свой выигрыш, аскеты --- минимизируют свой выигрыш, а кооператоры максимизируют сумму выигрышей. Найдите равновесия Нэша для игры каждой пары игроков. Обратите внимание, что кооператорам ничто не может помешать достичь их цели.

Существенно, что когда аскет, играя с эгоистом, выигрывает больше, чем эгоист на его месте, то отличается не столько поведение самого игрока, сколько ожидания других игроков о его поведении.