Эллиптические кривые над $\mathbb{C}$

Задача 1° (эллиптические кривые над $\mathbb{R}$). Пусть $E/\mathbb{C}$ — эллиптическая кривая, отвечающая решётке $\Lambda \subset \mathbb{C}$.

a) Докажите, что E изоморфна кривой, определённой над $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда существует такое $\alpha \in \mathbb{C}^\times$, что $\alpha\Lambda$ переходит в себя при комплексном сопряжении.
Подсказка: сначала докажите, что $\overline{j(\Lambda)} = j(\overline{\Lambda})$.

b) Предположим, что E определена над $\mathbb{R}$ и что мы выбрали решётку Λ для E, как в пункте (a) (т.е. Λ инвариантна относительно комплексного сопряжения). Докажите, что $\Delta(\Lambda) \in \mathbb{R}$ и что $E(\mathbb{R})$ связно тогда и только тогда, когда $\Delta(\Lambda) < 0$.

c) Пусть $E/\mathbb{C}$ задаётся уравнением Лежандра $E\colon y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$. Докажите, что $\lambda \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда E может быть определена над $\mathbb{R}$ и $E[2] \subset E(\mathbb{R})$.

d) Докажите, что если E определена над $\mathbb{R}$ и $E[2] \subset E(\mathbb{R})$, то существует прямоугольная решётка для E, т.е. решётка, имеющая вид $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 i$ с $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$.

Задача 2 (о гильбертовом поле классов). Пусть $K/\mathbb{Q}$ — мнимое квадратичное поле, $\mathcal{O}$ — кольцо целых K и пусть $h_{\mathcal{O}}$ обозначает число классов идеалов $\mathcal{O}$.

a) Докажите, что с точностью до изоморфизма существует в точности $h_{\mathcal{O}}$ эллиптических кривых $E/\mathbb{C}$ с кольцом эндоморфизмов $\operatorname{End}(E) \cong \mathcal{O}$.

b) Докажите, что если E — кривая с $\operatorname{End}(E) \cong \mathcal{O}$, то $j(E)$ алгебраично и степень расширения $[K(j(E))\colon K] \le h_{\mathcal{O}}$.

На самом деле, $K(j(E))$ — гильбертово поле классов K, поэтому неравенство является равенством.

Задача 3. Пусть $E_1/\mathbb{C}$ и $E_2/\mathbb{C}$ — эллиптические кривые и предположим, что E_1 имеет комплексное умножение. Докажите, что E_1 изогенна E_2 тогда и только тогда, когда $\operatorname{End}(E_1) \otimes \mathbb{Q} \cong \operatorname{End}(E_2) \otimes \mathbb{Q}$.

Задача 4 (спаривание Вейля над $\mathbb{C}$). Пусть $E = \mathbb{C}/\Lambda$ — эллиптическая кривая, $1, \tau$ — образующие решётки Λ. Пусть $P_1 = a + b\tau, P_2 = c + d\tau \in E[n]$ — две точки n-деления на E, $a, b, c, d \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}$. Положим $e_n(P_1, P_2) = \exp(2\pi i(ad - bc)) \in \mu_n$.

a°) Покажите, что e_n — билинейное, кососимметричное, невырожденное спаривание.

b^*) Докажите, что e_n с точностью до знака (т. е. e_n или e_n^{-1}) совпадает со спариванием Вейля.