Экзамен

Алгебра 1, НМУ, 02.12.2012

Вариант 1

1. Найдите наибольшее значение, которое может принимать определитель 3×3 матрицы, при условии, что все её элементы равны ± 1.

2. Найдите σ^{150}, где $\sigma = (3, 5, 4, 6, 9, 7, 1, 10, 8, 2)$.

3. Пусть $A^{j_1,\dots,j_k}_{i_1,\dots,i_k}$ – минор матрицы A, полученный вычёркиванием из A строк с номерами $i_1, \dots, i_k$ и столбцов с номерами $j_1, \dots, j_k$. Докажите тождество Льюиса Кэрролла:

$$A^{1n}_{1n} \det A = A^1_1 A^n_n - A^n_1 A^1_n.$$

4. Докажите, что кососимметрический тензор $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ разложим тогда и только тогда, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

5. Пусть $s_k = \operatorname{tr}(A^k)$, σ_k – сумма главных миноров порядка k матрицы А. Докажите, что для любого натурального m выполняется равенство

$$s_m - s_{m-1}\sigma_1 + s_{m-2}\sigma_2 - \dots + (-1)^m m\sigma_m = 0.$$

6. Пусть A и B — матрицы размера $n \times m$ и $m \times n$ соответственно, причём $n \le m$. Тогда

$$\det AB = \sum_{1 \le k_1 < \dots < k_n \le m} A_{k_1,\dots,k_n} B^{k_1,\dots,k_n},$$

где $A_{k_1,\dots,k_n}$ – минор, полученный из столбцов матрицы A с номерами $k_1, \dots, k_n$, а $B^{k_1,\dots,k_n}$ – минор, полученный из строк матрицы B с номерами $k_1, \dots, k_n$.

7. Пусть B — вещественная матрица и $\det B = 1$. Всегда ли найдётся такая вещественная матрица A, что $B = e^A$?