Экзамен

Алгебра 1, НМУ, 02.12.2012

Вариант 2

1. Найдите наибольшее значение, которое может принимать определитель 3×3 матрицы, при условии, что все её элементы равны 1 или 0.

2. Найдите σ^{100}, где $\sigma = (3, 5, 4, 1, 7, 10, 2, 6, 9, 8)$.

3. Пусть $A_{i_1,\dots,i_k}^{j_1,\dots,j_k}$ – минор матрицы A, полученный вычёркиванием из A строк с номерами $i_1, \dots, i_k$ и столбцов с номерами $j_1, \dots, j_k$. Докажите тождество Льюиса Кэрролла:

$$A_{1n}^{1n} \det A = A_1^1 A_n^n - A_1^n A_n^1.$$

4. Пусть d — определитель системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \sum_{q=1}^{n} a_{p,q} x_q = 0,$$

где неизвестными считаются $(n+1)n/2$ величин $x_i x_j$, упорядоченных лексикографически. Найдите d.

5. Пусть $s_k = \mathrm{tr}(A^k)$, σ_k – сумма главных миноров порядка k матрицы A. Докажите, что для любого натурального m выполняется равенство

$$s_m - s_{m-1}\sigma_1 + s_{m-2}\sigma_2 - \dots + (-1)^m m \sigma_m = 0.$$

6. Пусть A и B — матрицы размера $n \times m$ и $m \times n$ соответственно, причём $n \leq m$. Тогда

$$\det AB = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_n \leq m} A_{k_1,\dots,k_n} B^{k_1,\dots,k_n},$$

где $A_{k_1,\dots,k_n}$ – минор, полученный из столбцов матрицы A с номерами $k_1, \dots, k_n$, а $B^{k_1,\dots,k_n}$ – минор, полученный из строк матрицы B с номерами $k_1, \dots, k_n$.

7. Пусть A — вещественная матрица. Докажите, что $\det e^A = 1$ тогда и только тогда, когда $trA = 0$.