

Поля конечной характеристики

A3.1. Когда конечное поле \mathbb{F}_{p^n} содержится в конечном поле \mathbb{F}_{p^m} ?

A3.2. Пусть K — поле характеристики p , не являющееся совершенным (т.е. $K \neq K^p$). Докажите, что над K существуют неприводимые несепарабельные многочлены. Выведите отсюда, что у K бывают несепарабельные расширения.

Теорема Веддербёрна

В следующей серии задач D — конечное *тело* (т.е. кольцо, в котором каждый ненулевой элемент имеет обратный).

A3.3. Докажите, что если центр тела D состоит из q элементов, то $|D| = q^n$.

A3.4. а) Докажите, что

$$q^n - 1 = q - 1 + \sum \frac{q^n - 1}{q^{m_i} - 1}, \quad (*)$$

где m_i — некоторые целые числа.

УКАЗАНИЕ. Рассмотрите действие группы D^\times обратимых элементов на себе сопряжениями.

б) Докажите, что числа m_i являются делителями числа n .

A3.5 (теорема Веддербёрна). Докажите, что конечное тело является полем.

УКАЗАНИЕ. Рассмотрите равенство (*) по модулю $\Phi_n(q)$ и воспользуйтесь тем, что $q - 1 < |\Phi_n(q)|$.