Плоские кривые

Напомним, что *результантом* многочленов $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ и $Q(x) = b_m x^m + \dots + b_0$ называется определитель

$$Res(P,Q) = \begin{vmatrix} a_n & & & & b_m & & & \\ a_{n-1} & a_n & & & b_{m-1} & b_m & & \\ \vdots & a_{n-1} & \ddots & & \vdots & b_{m-1} & \ddots & \\ a_0 & \vdots & \ddots & a_n & b_0 & \vdots & \ddots & b_m \\ & a_0 & & a_{n-1} & & b_0 & & b_{m-1} \\ & & \ddots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & a_0 & & & & b_0 \end{vmatrix}$$

А6.1. **а)** Докажите, что результант двух многочленов обращается в ноль тогда и только тогда, когда они имеют общий множитель.

б) Проверьте, что над алгебраически замкнутым полем $Res(P,Q) = \pm\prod(\alpha_i - \beta_j)$, где α и β — корни многочленов P и Q; в частности, $Res(P,P') = Disc(P)$.

А6.2. Покажите, что если две плоские кривые $P(x,y) = 0$ и $Q(x,y) = 0$ имеют конечное число общих точек, то это число не превосходит $\deg P \cdot \deg Q$ (“слабая форма теоремы Безу в размерности 2”).

Позже мы докажем, что верна и сильная форма теоремы Безу: если
- работать над алгебраически замкнутым полем
- в проективном (а не в аффинном) пространстве
- и правильно учитывать кратности,

то неравенство всегда обращается обращается в равенство.

А6.3. Из школьного курса геометрии известно, что две окружности пересекаются не более, чем в двух точках. Но теорема Безу утверждает, что точек пересечения должно быть четыре. Где еще две точки?

А6.4. *Скрученной кубикой* называется образ отображения $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$, $(u:v) \mapsto (u^3 : u^2v : uv^2 : v^3)$.

а) Задайте скрученную кубику тремя уравнениями.

б) По скольким точкам могут пересекаться кубика и плоскость?

в) Докажите, что двумя уравнениями скрученную кубику задать нельзя.

Определение. *Рациональной параметризацией* неприводимой плоской кривой $P(x,y) = 0$ называется пара непостоянных рациональных функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$, таких что $P(\varphi(t), \psi(t))$.

Напомним, что *особой точкой* плоской кривой $P(x,y) = 0$ называется ее точка, в которой $dP = 0$.

А6.5. Докажите, что любая особая неприводимая плоская кубика обладает рациональной параметризацией и постройте рациональную параметризацию плоской кубики $y^2 = x^3 - x^2$.

Указание. Проведите прямую через особую точку.

Можно показать, что никакая неособая кубика не обладает рациональной параметризацией.

Теорема Люрота утверждает, что любое подполе поля $k(t)$, содержащее k, но не совпадающее с k, изоморфно полю $k(t)$. Ей можно пользоваться без доказательства.

А6.6. Докажите, что плоская кривая над полем k обладает рациональной параметризацией тогда и только тогда, когда поле рациональных функций на ней изоморфно полю $k(t)$.

А6.7. Докажите, что если кривая обладает рациональной параметризацией, то эту параметризацию можно выбрать так, чтобы все точки кривой, кроме, возможно, конечного числа, были параметризованы ровно один раз.