НМУ, Математический анализ (1-й семестр). 9 декабря 2012 г.

Экзамен

1. Найдите пределы:
(а) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5^n+6^n+7^n}{8^n+9^n}}$;
(б) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$.

2. Вычислите интеграл: $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

3. Верно ли, что функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна тогда и только тогда, когда она переводит отрезки в отрезки и прообраз $\{f^{-1}(y)\}$ любой точки $y \in \mathbb{R}$ замкнут?

4. Циклоидой называется кривая, описываемая отмеченной точкой окружности (радиуса R), катящейся без проскальзывания по прямой.
(а) Вычислите длину арки циклоиды, т.е. длину участка кривой, заключенного между двумя ближайшими пересечениями с прямой, по которой катится окружность.
(б) Найдите кривизну циклоиды.

5. Пусть $f \in C^n(\mathbb{R})$ – n раз непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция. Пусть $M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ и $M_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(n)}(x)|$ – конечные величины, а $M_k = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Покажите, что
(а) при $n = 2$ выполнено $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$;
(б) в пункте (а) $\sqrt{2}$ не может быть замененен меньшим числом;
(в) при $n > 2$ выполнено $M_k \leqslant 2^{k(n-k)/2} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}$.

6. Докажите, что $\mathbb{R}$ нельзя представить как объединение счетного количества нигде не плотных множеств.

7. Всякий ли положительный многочлен $P(x, y)$ от двух вещественных переменных достигает своей нижней грани на плоскости?