Действительные числа. Пределы последовательностей.

1. Ограничены ли следующие множества (а) $\{a^n | n \in \mathbb{N}\}$, (б) $\{a^n/n! | n \in \mathbb{N}\}$, $a \in \mathbb{R}$?

Аксиома полноты. Если L и R – непустые множества действительных чисел такие, что для любых элементов $l \in L$ и $r \in R$ выполнено $l \leqslant r$, то существует такое действительное число c, что $l \leqslant c \leqslant r$ для любых элементов $l \in L$, $r \in R$.

2. Докажите принцип вложенных отрезков: если дана бесконечная последовательность вложенных отрезков

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots,$$

то найдется действительное число, принадлежащее всем этим отрезкам.

3. Верен ли аналогичный «принцип вложенных интервалов»?

4. Дайте определение $\sqrt{2}$, докажите его существование и иррациональность.

5. (а) Дано множество отрезков на прямой, причем любые два из них имеют общую точку. Верно ли, что существует точка, принадлежащая всем отрезкам?

(б) Верно ли аналогичное утверждение для прямоугольников на плоскости, стороны которых параллельны осям координат? (Прямоугольники рассматриваются вместе с внутренностью.)

(в) Верно ли это для произвольных прямоугольников на плоскости?

Предел. Про числовую последовательность $\{a_n\}$ говорят, что она сходится, если существует такое число A, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при всех $n > N$ выполнено $|A - a_n| < \varepsilon$. Число A называется пределом последовательности и обозначается

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

6. Докажите, что любая последовательность имеет не более одного предела, и, если он существует, то любая ее подпоследовательность имеет тот же предел.

7. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Докажите, что

(а) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$;

(б) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$;

(в) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, если $b \neq 0$.

8. Найдите такое $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, что $2^n > n^{100}$.

9. Найдите предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

10. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

11. Найдите предел последовательности

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

12. Сходятся ли последовательности

(а) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$;

(б) $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$?

13. Существует ли предел последовательности $a_n = \sin n$?

14. а) Докажите, что, если $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} = a$.

(б) Покажите, что обратное неверно.

15. Докажите, что $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$ при $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > -1$ (неравенство Я. Бернулли).

16. (а) Докажите, что последовательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ монотонно убывает.

(б) Докажите, что последовательность $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сходится. Предел этой последовательности обозначают

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$