НМУ, Математический анализ (1-й семестр). Листок 10. 16 ноября 2012 г.

Функции многих переменных

1. Придумайте функцию $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, имеющую в точке $x_0\in\mathbb{R}^2$ производную вдоль любого вектора, но (а) разрывную в x_0; (б) непрерывную в x_0, но не дифференцируемую в x_0; (в) непрерывную в $\mathbb{R}^2$, дифференцируемую в $\mathbb{R}^2\setminus x_0$, но не дифференцируемую в x_0.

2. Приведите пример функции $f(x,y)$, у которой в точке (x_0,y_0) существуют обе смешанные производные второго порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, но они не равны.

3. Докажите, что если f непрерывна в замкнутом n-мерном шаре, равна нулю на границе и дифференцируема во всех внутренних точках, то, по крайней мере, одна из внутренних точек является ее критической точкой.

4. Пусть $U\subseteq\mathbb{R}^n$ – открытое подмножество и пусть функции $f,g:U\to\mathbb{R}$ дифференцируемы в $x_0\in U$. Докажите, что (а) $d(f\cdot g)(x_0)=df(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot dg(x_0)$;

(б) Докажите, что если $g(x_0)\neq 0$, то f/g – диффернцируема в x_0 и
$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)=\frac{g(x_0)df(x_0)-f(x_0)dg(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

5. Для функций (а) $f(x,y)=x^2-x^4-y^2$ и (б) $f(x,y)=\cos x-y^2$ нарисуйте их линии уровня $\{(x,y)|f(x,y)=c\}$ и найдите их экстремумы.

6. Пусть f – гладкая функция на $\mathbb{R}^2$, и пусть ее ограничение на любую прямую, проходящую через x_0, имеет максимум в x_0. Верно ли, что x_0 – точка максимума функции f?

7. Напишите уравнение касательной плоскости к графику функции $f:U\to\mathbb{R}$, $U\subseteq\mathbb{R}^n$ в точке $x_0=(x_1^0,\dots,x_n^0)\in U$.

8. Опишите все функции $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющие уравнению $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$.

9. Уравнением колебаний струны называется следующее уравнение относительно неизвестной функции $u\in C^2(\mathbb{R})$:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$
График функции $y(x)=y(x,t)$ при фиксированном t представляет собой профиль струны в момент времени t.

(а) Найдите общее решение этого уравнения. (*Указание: рассмотрите новые координаты* $\xi=x-at$, $\eta=x+at$.)

(б) Пусть заданы начальные условия
$$\begin{cases} u(x,0)=u_0(x)\\ u_t'(x,0)=v_0(x)\end{cases}$$
Напишите формулу для решения, заданного этими условиями.

(в) (*Струна гитары.*) Пусть $v_0=0$, а u_0 – функция со следующим графиком:

Нарисуйте профиль струны в момент времени $t_k=\frac{kl}{4a}$, $k=0,\dots,5$.

(г) (*Струна рояля.*) Пусть $u_0=0$, а v_0 — функция со следующим графиком:

Нарисуйте профиль струны в момент времени $t_k=\frac{kl}{4a}$, $k=0,\dots,5$.