Полнота, компактность, пределы.

1. Найдите следующие пределы: (а) $a_n = \underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}}_{n}$, (б) $a_n = \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots+\sqrt{1}}}}}_{n}$.

2. (Теорема о двух милиционерах.) Пусть $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ для всех n, и пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A$. Докажите, что существует $\lim_{n\to\infty} b_n$, равный A.

3. Докажите, что мощность множества всех подмножеств данного множества больше, чем мощность самого множества.

Предельной точкой множества называется точка, в любой, сколь угодно малой, окрестности которой, лежит бесконечное количество точек множества.

4. (а) Могут ли точки $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ и только они быть предельными точками некоторого множества действительных чисел?

(б) Могут ли частичными пределами последовательности быть все точки $\mathbb{R}$?

Открытые и замкнутые множества. Открытым называется множество, которое вместе с любой точкой содержит некоторую ее окрестность. Замкнутым множеством называется множество, содержащее все свои предельные точки.

5. (а) Докажите, что множество X замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R}\setminus X$ открыто.

(б) Докажите, что объединение любого и пересечение конечного числа открытых множеств – открытое множество.

(в) Сформулируйте и докажите аналог этого утверждения для замкнутых множеств.

(г) Всегда ли пересечение счетного числа открытых множеств открыто?

6. Докажите, что множество $X \subseteq \mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Частичным пределом последовательности называется предел любой ее подпоследовательности. Верхним и нижним пределами последовательности называются следующие величины

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k, \qquad \underline{\lim}_{k\to\infty}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} a_k.$$

7. Докажите, что верхний и нижний пределы последовательности – это ее максимальный и минимальный частичные пределы.

8. Числами Фибоначчи называется последовательность чисел $\{f_n\}$, заданная рекуррентно: $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ при $n > 2$. Докажите, что существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, и найдите его.

9. Докажите, что число $e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ равно пределу послеовательности

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

10. Докажите иррациональность числа e. (Указание: Предположите обратное. Оцените величину $|e - a_n|$ и докажите, что она не может быть рациональной.)

Предел функции. Пусть a – предельная точка множества E, тогда говорят, что функция $f : E \to \mathbb{R}$ имеет предел A в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любой точки $x \in E$ такой, что $0 < |x-a| < \delta$, выполнено следующее соотношение $|f(x)-A| < \varepsilon$.

11. В каких точках следующие функции имеют пределы: (а) $\sin\frac{1}{x}$, (б) $x\sin\frac{1}{x}$?

12. (а) В каких точках имеет предел функция Римана: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n},\ \text{НОД}(m,n) = 1 \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$?

(б) В каких точках она непрерывна?