НМУ, Математический анализ (1-й семестр). Листок 3. 21 сентября 2012 г.

Непрерывные функции

1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы $A = \lim_{x\to x_0} f(x)$ и $B = \lim_{x\to x_0} g(x)$ в точке x_0. Докажите, что

(а) $f(x) \pm g(x) \to A \pm B$, $x \to x_0$;

(б) $f(x)g(x) \to AB$, $x \to x_0$;

(в) $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}$, $x \to x_0$, если $B \neq 0$.

2. Пусть функция $g(x) \to B$, $x \to x_0$ и $g(x)$ не принимает значения B в некоторой проколотой окрестности x_0, а функция $f(x) \to A$, $x \to B$. Докажите, что $\lim_{x\to x_0} f(g(x))$ существует и равен A.

3. Докажите, что сумма, разность, произведение и композиция непрерывных функций тоже непрерывны. Докажите, что если функция f непрерывна и не обращается в ноль, то и функция $1/f$ непрерывна.

4. Каким может быть множество значений непрерывной на интервале функции?

5. Докажите непрерывность функций (а) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in (0, +\infty)$; (б) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

6. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ переводит каждый отрезок в отрезок. Следует ли отсюда, что она непрерывна?

7. Докажите, что монотонная функция может иметь разрывы только первого рода, т.е. в любой точке x_0 она имеет предел слева $\lim_{x\to x_0-0} f(x)$ и предел справа $\lim_{x\to x_0+0} f(x)$.

8. Докажите, что множество точек разрыва монотонной функции счетно.

9. Докажите, что на экваторе найдутся две противоположных точки с одинаковой температурой.

10. На сковородке лежат два блина. Докажите, что их можно разрезать одним разрезом так, чтобы каждый из блинов разделить на два куска одинаковой площади.

11. Докажите, что непрерывная функция обладает обратной функцией тогда и только тогда, когда она строго монотонна, и при этом обратная также непрерывна и строго монотонна.

12. Докажите, что непрерывная функция $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ может быть единственным образом продолжена на все $\mathbb{R}$ до непрерывной функции $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

13. Определите функцию $f(x) = a^x$, $a > 0$ на $\mathbb{R}$. Покажите, что она монотонно возрастает (убывает) при $a > 1$ ($a < 1$) и непрерывна. Определите ее обратную функцию $f^{-1}(x) = \log_a x$ на $(0, +\infty)$.

14*. Функция Римана непрерывна в иррациональных точках и разрывна в рациональных. Может ли функция быть непрерывной во всех рациональных точках и разрывна в иррациональных?

Пусть имеется последовательность функций $f_n(x)$, определенных на некотором множестве E. Говорят, что последовательность функций f_n равномерно на E сходится к функции f, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что для любого $n > N$ и любого $x \in E$ выполнено $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Пишут $f_n \rightrightarrows f$, $x \in E$.

Если для последовательности f_n верно лишь, что для любого $x \in E$ выполнено $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, то сходимость называют поточечной.

15. Приведите пример последовательности f_n и множества E, на котором она сходится поточечно, но не равномерно.

16. Докажите, что равномерный предел последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией.

17. Докажите, что, если последовательность непрерывных функций $f_n \in C[a, b]$ сходится поточечно к непрерывной функции $f \in C[a, b]$ и последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ монотонны при всех $x \in [a, b]$, то она сходится к ней равномерно на $[a, b]$.

18. (а) Постройте последовательность непрерывных функций f_n, поточечно сходящуюся к функции Римана.

(б*) Существует ли последовательность непрерывных функций, поточечно сходящаяся к функции Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$?