Метрические пространства. Компактность. Непрерывные отображения.

Метрикой (функцией расстояния) на множестве X называется функция $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая трем свойствам:

(1) $\rho(x,y) = \rho(y,x) \geqslant 0$ для всех $x, y \in X$;

(2) равенство $\rho(x,y) = 0$ достигается, если и только, если $x = y$;

(3) выполнено неравенство треугольника $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

Число $\rho(x,y)$ называется расстоянием между точками x и y.

1. Пространство $\mathbb{R}^n$ по определению состоит из упорядоченных наборов n действительных чисел $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

(а) Проверьте, что функция $\rho_1(x,y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(|x_i - y_i|)$ является метрикой в $\mathbb{R}^n$. Как выглядят шары в этой метрике?

(б) Проверьте, что функция $\rho_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ также является метрикой в $\mathbb{R}^n$.

(в) Докажите полноту метрических пространств $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$ и $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$. Докажите, что множество в $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$ или $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

2. Верно ли, что для любой метрики ρ функция

$$\tilde{\rho}(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1 + \rho(x,y)}$$

снова является метрикой?

3. Докажите, что непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$ на метрическом компакте (X, ρ) достигает своего максимального и минимального значений.

4. В метрическом пространстве шар большего радиуса может строго содержаться в шаре меньшего радиуса. Приведите пример.

5. Приведите пример полного метрического пространства и последовательности вложенных замкнутых шаров в этом пространстве, пересечение которых пусто. (Заметим, что, если радиусы шаров стремятся к нулю, то такая последовательность вложенных шаров обязана иметь общую точку.)

6. Докажите, что метрическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда у всякой последовательности, лежащей в X, есть предельная точка.

Отображение $f : X \to X$ называется сжимающим, если существует такое число $0 < q < 1$, что для любых $x, y \in X$ выполнено

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant q\rho(x,y).$$

7. Докажите, что сжимающее отображение полного метрического пространства непрерывно и имеет ровно одну неподвижную точку.

8. Приведите пример отображения $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ без неподвижных точек, такого, что $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ для любых $x \neq y$.

9. Докажите, что, если какая-то итерация $f^{\circ n}$ отображения f полного пространства X в себя является сжимающей, то f имеет неподвижную точку. Может ли при этих условиях отображение f иметь несколько неподвижных точек.

10. Пусть $1 < \lambda < 3$ и $f(x) = \lambda x(1-x)$. Докажите, что для всякой точки $x \in (0,1)$ последовательность $f^{\circ n}(x)$ сходится к неподвижной точке отображения f.

11. (а) Пусть $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, $z \in \mathbb{C}$. Докажите, что образ $P(X)$ любого замкнутого можества $X \subseteq \mathbb{C}$ – снова замкнутое множество.

(б) Верно ли это для многочлена от двух переменных $Q(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

12. Пусть X – компактное метрическое пространство, а $F : X \to X$ – отображение, такое, что $\rho(F(x), F(y)) < \rho(x,y)$ для любой пары различных точек $x, y \in X$. Докажите, что F имеет единственную неподвижную точку.