НМУ, Математический анализ (1-й семестр). Листок 5. 5 октября 2012 г.

Производная

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называют величину $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

$1^{\times}$. Пусть функции u и v определены в окрестности точки x и дифференцируемы в x. Докажите, что функции $u+v$, uv, а также u/v (при условии $v(x)\neq 0$) дифференцируемы в x, и что (а) $(u+v)'(x) = u'(x)+v'(x)$; (б) $(uv)'(x) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$; (в) $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$.

$2^{\times}$. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0\in\mathbb{R}$ и дифференцируема в этой точке, а $g(y)$ определена в окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ и дифференцируема в y_0. Докажите, что их композиция $(g\circ f)(x) = g(f(x))$ определена в окрестности x_0, дифференцируема в x_0 и $(g\circ f)'(x) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

$3^{\times}$. Пусть $f: U\to V$ и $f^{-1}: V\to U$ взаимно обратные и непрерывные в точках $x_0\in U$, $y_0 = f(x_0)\in V$ соответственно. Докажите, что, если $\exists\, f'(x_0)\neq 0$, то $f^{-1}(y)$ дифференцируема в y_0 и $(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$.

4. Найдите производную функции $f(x) = (x+1)(x+2)\dots(x+100)$ в точке $x=-1$.

5. Докажите, что производная четной дифференцируемой функции нечетна, а нечетной – четна.

6. Придумайте функцию f на прямой, которая непрерывна только в одной точке и в ней дифференцируема.

7. Докажите, что $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

$8^{\times}$. Найдите производные функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

9. Вычислите пределы: (а) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$; (б) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$; (в) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$.

10. Найдите производные функций a^x, $\log_a x$, x^α.

11. Найдите $\max_{n\in\mathbb{N}}\sqrt[n]{n}$.

12. Пусть функция f дифференцируема на $[a,b]$. Докажите, что ее производная на $[a,b]$ принимает все значения между $f'(a)$ и $f'(b)$. (Указание: рассмотрите случай, когда $f'(a)$ и $f'(b)$ имеют разные знаки.)

13. На плоскости в точке $(p/2,0)$ находится источник света. Докажите, что лучи, выпущенные из источника, после отражения от параболического зеркала $y^2 = 2px$ распространяются параллельно друг другу.

Функция $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ называется выпуклой вниз (вверх), если для любых двух точек $x_1, x_2\in(a,b)$ и любых положительных α_1, α_2 таких, что $\alpha_1+\alpha_2=1$, выполнено следующее неравенство

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)\quad\left(f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)\geqslant\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)\right).$$

Если при всех $x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2$ выполнены строгие неравенства, то говорят о строгой выпуклости.

14. Докажите, что график выпуклой вниз функции лежит выше любой касательной к нему.

15. Докажите, что выпуклая вниз функция непрерывна в любой точке своей области определения (за исключением, возможно, крайних точек).

16. (а) Докажите, что функция $x\mapsto e^x$ выпукла вниз.

(б) Выведите отсюда неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}.$$

17. Докажите формулу Тейлора для многочленов: если $P_n(x) = a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$, то при любом $x_0\in\mathbb{R}$

$$P_n(x) = P_n(x_0)+\frac{P_n'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

18^*. Постройте пример непрерывной, нигде не дифференцируемой функции.

Задачи с крестиками “×” можно не сдавать, если вы ранее знали их решения.