НМУ, Математический анализ (1-й семестр). Листок 6. 12 октября 2012 г.

Формула Тейлора. Степенные ряды.

Разложением Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0 называется следующая сумма

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$

$1^{\times}$. Разложите в $x_0 = 0$ следующие функции по формуле Тейлора с остаточным членом $O(x^n)$ (а) e^x и a^x; (б) $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ и $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$; (в) $\cos x$ и $\sin x$; (г) $(1+x)^{\alpha}$.

$2^{\times}$. Напишите первые n членов разложения Тейлора при $x_0 = 0$ для следующих функций (а) $\ln(1+x)$; (б) $\operatorname{arctg} x$; (в) $\arcsin x$; (г) $\frac{1}{1-2x+2x^2}$.

3. Выпишите первые три члена разложения Тейлора при $x_0 = 0$ для следующих функций (а) $\frac{1}{\cos x}$; (б) $e^{\sin x}$; (в) $\sqrt{\cos x}$.

4. Как выражаются разложения Тейлора функций $f+g$, fg; f^{-1}; $f \circ g$ через разложения Тейлора функций f и g?

5. Найдите 2012-ю производную $f^{(2012)}(0)$ функции

$$f(x) = \sin(x^{812} + x^{600}).$$

6. Вычислите пределы: (а) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$; (б) $\lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$; (в) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\operatorname{sh} x) - \operatorname{sh}(\sin x)}{x^7}$.

7. Найдите рекуррентную формулу для вычисления коэффициентов a_k в разложении

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} x^k + o(x^n), \quad x \to 0.$$

(*Указание:* $(\operatorname{tg} x)' = \operatorname{tg}^2 x + 1$.)

8. Докажите правило Лопиталя. Пусть $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ и $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ дифференцируемы на (a,b) и $g'(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$ и $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to A$, $x \to a+0$. Тогда, если $f(x) \to 0$ и $g(x) \to 0$ при $x \to a+0$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to A, \quad x \to a+0.$$

Формальная сумма $\sum_{i=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ называется степенным рядом. Ряд называется сходящимся в точке x, если сходится последовательность $S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_n(x-x_0)^n$ его частичных сумм. Величина

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

называется суммой ряда. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ называется сходящимся абсолютно, если сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x-x_0|^n$. Степенной ряд при $x - x_0 = 1$ называется числовым рядом.

9. Докажите, что абсолютно сходящийся ряд сходится.

10. Докажите, что сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от перестановки его членов. Верно ли это для условно (не абсолютно) сходящегося ряда?

11. Докажите, что ряд, являющийся произведением абсолютно сходящихся рядов, абсолютно сходится, а его сумма равна произведению сумм сомножителей.

Функция называется аналитической в точке x_0, если в некоторой окрестности x_0 она совпадает с суммой своего ряда Тейлора, записанного точке x_0. Функция аналитична на множестве, если она аналитична в любой его точке.

12. Докажите, что аналитическаая в точке функция бесконечно дифференцируема в этой точке. Верно ли обратное?

13. Докажите, что ненулевая аналитическая на отрезке функция не может иметь бесконечно много нулей на этом отрезке. Верно ли это для бесконечно дифференцируемой на отрезке функции?

Задачи с крестиками “×” можно не сдавать, если вы ранее знали их решения.