Ряды: числовые и функциональные.

Числовые ряды.

1. Пусть $\{a_n\}$ – последовательность положительных чисел, монотонно стремящаяся к нулю. Докажите, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходтися ряд $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$.

2. Исследуйте следующие ряды на сходимость: (а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}}$, $\delta > 0$; (б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$; (в) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln \ln n}$.

3. Докажите интегральный признак сходимости ряда. Пусть $f(x)$ – неотрицательная строго монотонно убывающая на $[1, +\infty)$ функция. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится тогда и только тогда, когда существует предел $\lim_{y\to\infty} \int_1^y f(x)\,dx$.

4. Исследуйте сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha} n}$ при различных α.

5. Исследуйте ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ на сходимость.

6. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – два ряда с неотрицательными членами. Докажите, что, если существует такой номер $N \in \mathbb{N}$, что при любом $n > N$ выполнено $a_n \leqslant b_n$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

7. Докажите, что абсолютно сходящийся ряд с комплексными членами (а) сходится; (б) его сумма не зависит от перестановки членов; (в) абсолютно сходящиеся ряды можно перемножить почленно и сумма полученного абсолютно сходящегося ряда будет произведением сумм сомножителей.

Степенные ряды.

8. (а) Докажите, что степенной ряд

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

с комплексными членами сходится при всех z, таких, что $|z - z_0| < R$, и расходится при всех таких z, что $|z - z_0| > R$, где R определено формулой Коши–Адамара:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

(б) Докажите, что на любом компакте, лежащем в круге сходимости ряд сходится равномерно.

9. Докажите, что радиус R сходимости степенного ряда может быть найден по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

если предел сущестует.

10. Найдите радиус сходимости ряда: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{2^n}$.

11. Придумайте степенные ряды, области сходимости которых (а) $\{0\}$; (б) $[-R, R]$; (в) $[-R, R)$; (г) $(-R, R)$.

12. С помощью интегрирования рядов для производных найдите разложения Тейлора для обратных тригонометрических функций (а) $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$; (б) $\arcsin x$, $\arccos x$.

13. Найдите суммы рядов: (а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.

14. Найдите суммы числовых рядов: (а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; (б) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$.

15. Докажите, что дзета-функция Римана $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ непрерывна в области $x > 1$ и имеет в этой области непрерывные производные всех порядков.

16. Приведите пример бесконечно дифференцируемой функции f, ряд Тейлора которой (а) расходится в каждой точке, кроме нуля; (б) сходится всюду, но не к функции f.