НМУ, Математический анализ (1-й семестр). Листок 9. 2 ноября 2012 г.

Дифференциальные и интегральные уравнения

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Рассмотрим уравнение $f'(x) + af(x) = g(x)$, $a \in \mathbb{C}$. Опишите все решения этого уравнения.

2. Рассмотрим отображение $(Df)(x) = f'(x)$. Проверьте, что это отображение является линейным оператором, и что наше уравнение можно переписать в виде $p(D)(f) = g$, где $p(t) = t^n + a_{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$.

3. Разложим многочлен $p(t)$ из предыдущей задачи на линейные множители (с комплексными коэффициентами):

$$p(t) = (t - a_1)(t - a_2)\ldots(t - a_n).$$

Как использовать это разложение для получения всех решений уравнения $p(D)(f) = g$?

4. Докажите, что если различные корни многочлена $p(t)$ суть $b_1, \ldots, b_k$, и

$$p(t) = (t - b_1)^{n_1}(t - b_2)^{n_2}\ldots(t - b_k)^{n_k},$$

то каждое решение однородного уравнения

$$p(D)(f) = 0$$

имеет вид

$$f(x) = f_1(x)e^{b_1 x} + f_2(x)e^{b_2 x} + \ldots + f_k(x)e^{b_k x},$$

где $f_j(x)$ – многочлен от x степени меньше n_j, $j = 1, \ldots, k$.

Теоремы существования и единственности решений дифференциальных и интегральных уравнений. Применение принципа сжимающих отображений.

5. Докажите, что при достаточно малом значении параметра λ уравнение Фредгольма второго рода:

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)f(y)dy + \varphi(x)$$

с неизвестной функцией $f(x)$ и непрерывными при $a \leqslant x, y \leqslant b$ функциями $K(x,y)$ и $\varphi(x)$, имеет единственное решение $f(x)$.

Указание: рассмотрите линейный оператор $A : C[a,b] \to C[a,b]$, такой, что

$$Af(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)f(y)dy + \varphi(x),$$

и докажите, что при достаточно малых λ он является сжимающим.

6. Докажите, что при любом значении параметра λ уравнение Вольтерра второго рода:

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,y)f(y)dy + \varphi(x)$$

с неизвестной функцией $f(x)$ и теми же условиями на функции $K(x,y)$ и $\varphi(x)$, что в предыдущей задаче, имеет единственное решение $f(x)$.

Указание: Воспользуйтесь задачей 9 из листка 4.

7. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x,y),$$

причем в области $|x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$ функции f и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны. Докажите, что у данного уравнения на некотором промежутке $x_0 - d \leqslant x \leqslant x_0 + d$ сущестует единственное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Указание: рассмотрите эквивалентное уравнение $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x))dx$.