Математический анализ, 2 курс, 2012/13 уч.г.

Листок № 4, 28 сентября 2012 года.

Задачи с пометкой ‘ можно сдавать только в день выдачи листка. Остальные задачи можно сдавать в любые последующие дни.

1‘. Скалярное произведение задано матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поднять и опустить индекс у тензора $e_3 \otimes e^1 + e_4 \otimes e^2$.

2‘. Тензор $(e_1+e_2)\otimes(2e^1-e^3)$ задаёт некоторый оператор A. Какой тензор задаёт оператор A^2.

3‘. **а)** Докажите, что форма $xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy$ инвариантна относительно ортогональных преобразований, сохраняющих ориентацию. **б)** Напишите её в сферических координатах.

4‘. Пусть f – функция на многообразии. Докажите, что $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^i}$ тензором вообще говоря не является.

5. Пусть Ω – дифференциальная p-форма, ω – дифференциальная 1-форма, не равная 0. Доказать, что Ω представима в виде $\Omega = \theta \wedge \omega$ тогда и только тогда когда $\Omega \wedge \omega = 0$.

6. Найдите все 2-формы на $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$, инвариантные относительно ортогональных преобразований, сохраняющих ориентацию.

7. Найдите все симметричные 2-тензора $T_{ij}(x)$ на $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$, инвариантные относительно ортогональных преобразований, сохраняющих ориентацию.

8. (Форма Гельфанда-Лере) **а)** Пусть F – гладкая функция на $\mathbb{R}^n$, причём дифференциал dF не равен нулю в нулях F. Таким образом множество $M = \{F = 0\}$ является подмногообразием в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что в окрестности M существует форма η такая, что $\eta \wedge dF = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. **б)** Докажите, что ограничение $\eta|_M$ не зависит как от функции, задающей подмногообразие, так и от произвола в выборе η.