Математический анализ, 2 курс, 2012/13 уч.г.
Листок № 9, 2 ноября 2012 года.

Задачи с пометкой ‘ можно сдавать только в день выдачи листка. Остальные задачи можно сдавать до следующего занятия включительно.

1‘. Вычислите риманову метрику на единичной сфере в $\mathbb{R}^3$ в сферических координатах.
2‘. Рассмотрим единичную сферу в $\mathbb{R}^3$ и пусть $p = (0,0,1)$ – северный полюс. Введём стереографические координаты на $S^2 \backslash \{p\}$ с помощью проекции из точки p на плоскость x, y. Вычислите метрику на S^2 в этих координатах.

Определение. Положим $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

3. Отождествим сферу S^2 с $\overline{\mathbb{C}}$ с помощью стереографической проекции. Какие дробно-линейные преобразования сохраняют метрику на S^2?
4. Пусть на многообразии M^n задано интегрируемое $(n-1)$-мерное распределение $\mathcal{D}^{n-1}$. Докажите, что существует покрытие $\{U_\sigma\}$ многообразия M^n и формы $\omega_\sigma \in \Omega^1(U_\sigma)$, задающие распределение $\mathcal{D}^{n-1}$, такие, что существует дифференциальная форма $\theta \in \Omega^1(M^n)$ такая, что

$$d\omega_\sigma = \omega_\sigma \wedge \theta.$$

5. (Характеристический класс Годбийона-Вея) Пусть $\mathcal{D}^{n-1}$ – интегрируемое $(n-1)$-мерное распределение на многообразии M^n и пусть θ – форма из предыдущей задачи. Положим $\Gamma = \theta \wedge d\theta$. Докажите, что форма Γ замкнута.
6. (Продолжение) Докажите, что когомологический класс формы Γ зависит только от самого распределения.