Математический анализ, 2 курс, 2012/13 уч.г.

Листок № 7, 19 октября 2012 года.

Задачи с пометкой ‘ можно сдавать только в день выдачи листка. Остальные задачи можно сдавать до следующего занятия включительно.

1‘. Вычислите интеграл по эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ от формы

а) $dx \wedge dy$;

б) $zdx \wedge dy$;

в) $z^2 dx \wedge dy$;

д) $\frac{dy\wedge dz}{x}+\frac{dz\wedge dx}{y}+\frac{dx\wedge dy}{z}$.

2‘. Вычислите интеграл по верхней половине ($z \geq 0$) того же эллипсоида от формы

а) $x^3 dy \wedge dz$;

б) $yzdz \wedge dx$.

3‘. Вычислите поток поля $\frac{\vec{r}}{|r|^3}$ через граничную поверхность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

4‘. Пусть M – ориентированная поверхность в $\mathbb{R}^3$ и $V = A(x)\frac{\partial}{\partial x^1}+B(x)\frac{\partial}{\partial x^2}+C(x)\frac{\partial}{\partial x^3}$ – некоторое векторное поле. Докажите, что поток поля V через M равен интегралу по M от формы $Adx^2 \wedge dx^3 + Bdx^3 \wedge dx^1 + Cdx^1 \wedge dx^2$.

5. Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ – трёхмерное подмногообразие с границей и V – некоторое векторное поле на $\mathbb{R}^3$. Докажите, что поток V через ∂M равен $\int_M \operatorname{div} V$.

6. Выясните для каких n проективное пространство $\mathbb{RP}^n$ ориентируемо.

7. Выясните для каких n и k Грассманиан $Gr(k, n)$ ориентируем.

8. Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана гиперповерхность $M = \{F = 0\}$ и η – форма Гельфанда-Лере на M. Докажите, что форма площади σ на M задаётся равенством

$$\sigma = dF(\nu)\eta,$$

где ν – единичная нормаль к M.