Математический анализ, 2 курс, 2012/13 уч.г.
Листок № 2, 14 сентября 2012 года.

Задачи с пометкой ‘ можно сдавать только в день выдачи листка. Остальные задачи можно сдавать в любые последующие дни.

1‘. Определим подмножества $U_{\pm 1} \subset S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ равенствами $U_{\pm 1} = \{(x, y, z) \in S^2 | z \neq \pm 1\}$. Определим отображения $\phi_{\pm 1} \colon U_{\pm 1} \to \mathbb{R}^2$ стереографическими проекциями из точек $(0, 0, \pm 1)$ на плоскость $z = 0$. Найдите функцию перехода между картами $\phi_{\pm 1}$.

2‘. Определим подмножества $U_i \in \mathbb{RP}^n$, $i = 0, 1, \ldots, n$, равенствами

$$U_i = \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{RP}^n | x_i \neq 0\}.$$

Определим отображения $\phi_i \colon U_i \to \mathbb{R}^n$ равенствами

$$\phi_i(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right).$$

Докажите, что набор отображений ϕ_i является атласом, задающим на $\mathbb{RP}^n$ структуру гладкого многообразия, и найдите функции перехода.

3‘. Однородный многочлен $p(x_0, \ldots, x_n)$ называется неособым, если в $\mathbb{R}^{n+1} \backslash 0$ его частные производные не обращаются в ноль одновременно. Докажите, что если многочлен $p(x_0, \ldots, x_n)$ является неособым, то подмножество $S_p = \{(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \in \mathbb{RP}^n | p(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0\}$ является гладким подмногообразием в $\mathbb{RP}^n$.

4‘. Пусть M – компактное многообразие со свободным действием конечной группы G. Введите на факторпространстве M/G структуру гладкого многообразия так, чтобы проекция $M \to M/G$ была гладким отображением.

5. Пусть m, n, r – целые числа, причём $1 \leq r \leq m, n$. Докажите, что множество $m \times n$-матриц ранга r является гладким подмногообразием в пространстве всех $m \times n$-матриц и найдите его размерность.

Многообразие размерности n называется параллелизуемым, если на нём существует n векторных полей, линейно независимых в каждой точке.

6. Докажите, что сфера S^3 параллелизуема.

7. Пусть $s \geq 2$ и одно из чисел $n_1, n_2, \ldots, n_s$ нечётно. Докажите, что многообразие $S^{n_1} \times S^{n_2} \times \ldots \times S^{n_s}$ параллелизуемо.

8‘. Пусть $Gr_m(\mathbb{R}^n)$ – множество всех m-мерных плоскостей в пространстве $\mathbb{R}^n$. Выберем в $\mathbb{R}^n$ базис $e_1, \ldots, e_n$. Пусть $1 \leq a_1 < \ldots < a_m \leq$

n. Определим $U_{a_1,\dots,a_m} \subset Gr_m(\mathbb{R}^n)$ как множество плоскостей, взаимно однозначно проектирующихся на плоскость, порождённую векторами $e_{a_1},\dots,e_{a_m}$. Под проекцией мы понимаем координатную проекцию. Пусть $\Pi \in U_{a_1,\dots,a_m}$ и пусть $v_1,\dots,v_m$ – базис в Π, проектирующийся в базис $e_{a_1},\dots,e_{a_m}$. Пусть $v_i = e_{a_i} + \sum_{j\notin\{a_1,\dots,a_m\}} \alpha_{i,j} e_j$. Числа $\alpha_{i,j}$ образуют $m \times (n-m)$-матрицу, которую мы обозначим через M. Определим отображение

$$\phi_{a_1,\dots,a_m} \colon U_{a_1,\dots,a_m} \to Mat_{m,n-m}, \Pi \mapsto M.$$

Докажите, что набор отображений $\phi_{a_1,\dots,a_m}$ является атласом, задающим на $Gr_m(\mathbb{R}^n)$ структуру гладкого многообразия.