Математический анализ, 2 курс, 2012/13 уч.г.
Листок № 10, 9 ноября 2012 года.

Задачи с пометкой ‘ можно сдавать только в день выдачи листка. Остальные задачи можно сдавать до следующего занятия включительно.

1‘. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – гладкая функция на $\mathbb{R}^n$. Докажите, что существует линейная функция $l(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ со сколь угодно малыми коэффициентами такая, что $f + l$ является функцией Морса.
2. Пусть M^n – компактное подмногообразие в $\mathbb{R}^N$. Докажите, что при $N \geq 2n + 2$ в $\mathbb{R}^N$ существует такая гиперплоскость H, что ортогональная проекция на неё определяет вложение M^n в H.
3. (Слабая теорема Уитни) Докажите, что любое компактное многообразие M^n можно вложить в $\mathbb{R}^{2n+1}$.
4. Пусть M^n – подмногообразие в $\mathbb{R}^N$. Докажите, что существует такая точка $p \in \mathbb{R}^N$, что функция L_p является функцией Морса на M^n, где $L_p(x) = |x - p|^2$.
5. Пусть M^n – подмногообразие в $\mathbb{R}^N$. Докажите, что существует такая прямая $l \subset \mathbb{R}^N$, что функция pr_l является функцией Морса на M^n, где pr_l – проекция на прямую l.