Математический анализ, 2 курс, 2012/13 уч.г.

Листок № 1, 7 сентября 2012 года.

Задачи с пометкой ‘ можно сдавать только в день выдачи листка. Остальные задачи можно сдавать в любые последующие дни.

1‘. Выясните при каких значениях параметра α уравнение

$$y^2 = (x^2 - \alpha)(x - 1)$$

задаёт гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^2$. Нарисуйте получающиеся кривые.

2‘. Зададим поверхность в $\mathbb{R}^3$ параметрически формулами

$$\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = 2v^3 + uv \\ z(u,v) = 3v^4 + uv^2 \end{cases}$$

Нарисуйте эту поверхность и найдите её особые точки.

3‘. Докажите, что уравнение $M^2 = id$ задаёт в пространстве Mat_2 подмножество, связные компоненты которого являются гладкими подмногообразиями. Найдите их размерности.

4‘. Докажите, что уравнение $\det M = 1$ задаёт в пространстве $Mat_{n,n}$ гладкое подмногообразие.

5. Докажите, что уравнение $MM^T = id$ задаёт в пространстве $Mat_{n,n}$ гладкое подмногообразие и найдите его размерность.

6. Докажите, что уравнение $z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2 = 1$ задаёт в $\mathbb{C}^n$ гладкое подмногообразие, диффеоморфное касательному пространству к $(n-1)$-мерной сфере.

7. Докажите, что отображение $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^4$, определяемое формулой $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - x_2^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3)$, является погружением и что $f(S^2)$ есть подмногообразие в $\mathbb{R}^4$, диффеоморфное $\mathbb{RP}^2$.

8.(Пара коммутирующих операторов и циклический вектор) Рассмотрим пространство $Mat_{n,n} \times Mat_{n,n} \times \mathbb{R}^n$. Его элементами являются тройки (B_1, B_2, v). Положим

$$M_n = \left\{ (B_1, B_2, v) \,\middle|\, \begin{array}{c} 1) B_1B_2 - B_2B_1 = 0 \\ 2)\text{Вектора } B_1^i B_2^j v, i \geq 0, j \geq 0 \\ \text{порождают пространство } \mathbb{R}^n \end{array} \right\}.$$

Докажите, что M_n является гладким подмногообразием в $Mat_{n,n} \times Mat_{n,n} \times \mathbb{R}^n$ и найдите его размерность.