Математический анализ, 2 курс, 2012/13 уч.г.
Листок № 3, 21 сентября 2012 года.

Задачи с пометкой ‘ можно сдавать только в день выдачи листка. Остальные задачи можно сдавать в любые последующие дни.

1‘. Является ли $(1, -4, 1)$ касательным вектором к единичной сфере в $\mathbb{R}^3$? Если да, то записать его в сферических координатах.

2‘. Построить интегральные траектории векторного поля

$$y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

на плоскости.

3‘. Докажите, что операция коммутирования векторных полей линейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби $[[u, v], w]+[[v, w], u]+[[w, u], v] = 0$ (говорят, что векторные поля образуют алгебру Ли).

4‘. Доказать, что если два векторных поля касательные к некоторому подмногообразию, то их коммутатор тоже касательное к этому подмногообразию поле.

5. Рассмотрим следующие векторные поля на $\mathbb{R}^2$: $e = x\frac{\partial}{\partial y}$, $f = y\frac{\partial}{\partial x}$ и $h = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$.

1. Вычислите коммутаторы $[h, e]$, $[h, f]$ и $[e, f]$.
2. Докажите, что линейная оболочка этих полей изоморфна алгебре Ли 2×2-матриц с нулевым следом.

6. Для $G = SL(n), O(n) \subset Mat_{n,n}$ и $X \in G$ написать условие на матрицу $Y \in T_X Mat_{n,n}$, означающее, что $Y \in T_X G$.

7. Пусть X, Y – векторные поля, f, g – гладкие функции. Доказать, что

$$[fX, gY] = fg[X, Y] - gY(f)X + fX(g)Y.$$