Математический анализ, 2 курс, 2012/13 уч.г.
Листок № 11, 16 ноября 2012 года.

Задачи с пометкой ‘ можно сдавать только в день выдачи листка. Остальные задачи можно сдавать до следующего занятия включительно.

1‘. Определим отображение $U(3) \to U(3)$ равенством $A \mapsto A^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Найдите его степень.
2. Пусть M, N – замкнутые ориентированные многообразия размерности n и $f\colon M \to N$ – некоторое отображение. Докажите, что для произвольной формы $\omega \in \Omega^n(N)$ выполняется равенство $\int_M f^*\omega = \deg f \int_N \omega$.
3. Пусть M^n – ориентированное многообразие. Докажите, что существует отображение из M^n в n-мерную сферу любой заданной степени.
4. Пусть S_1, S_2 – поверхности родов g_1 и g_2, причём $g_1 < g_2$. Докажите, что любое отображение $S_1 \to S_2$ имеет нулевую степень.
5. Пусть S – поверхность рода g. Какие могут быть возможные степени отображения поверхности S в двумерный тор?
6. Классифицируете возможные степени отображения между двумя произвольными ориентируемыми поверхностями.
7. Докажите, что любое отображение $\mathbb{CP}^2$ в себя имеет неотрицательную степень.

Определение. Распределение гиперплоскостей называется коориентируемым, если на многообразии можно выбрать поле ненулевых векторов, трансверсальных гиперплоскостям распределения в каждой точке.

8. Пусть задано коориентируемое распределение гиперплоскостей.

а) Докажите, что его можно задать глобально заданной формой ω.

б) Докажите, что если распределение интегрируемо, то для некоторой формы θ выполняется равенство $d\omega = \omega \wedge \theta$.

9. (Характеристический класс Годбийона-Вея) Для коориентируемого интегрируемого распределения гиперплоскостей определим форму $\Gamma = \theta \wedge d\theta$. Докажите, что форма Γ замкнута и её когомологический класс не зависит от сделанных выборов.