Элементарная гиперболическая геометрия

Задача 3.1. Прямая AB пересекает абсолют в точках X и Y. Докажите, что длина отрезка AB в модели Пуанкаре равна логарифму двойного отношения точек A, B, X и Y а) если $A = i$, $B = \lambda i$ для модели в верхней полуплоскости; б) в общем случае.

Задача 3.2. а) Выражение $\dfrac{|z-w|^2}{\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}$ инвариантно относительно действия $SL_2(\mathbb{R})$ на верхней полуплоскости.

б) Расстояние d между точками z и w в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{ch} d = 1 + \frac{|z-w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}.$$

▷ Будем называть прямые, имеющие общую точку на абсолюте, *строго параллельными*, а прямые, не имеющие общих точек даже на абсолюте, *расходящимися.*

Задача 3.3. Равно ли расстояние между строго параллельными прямыми нулю?

Задача 3.4. Найдите геометрическое место точек, удаленных на расстояние k от прямой $\operatorname{Re} z = 0$ в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости. Является ли оно парой прямых?

Задача 3.5. Через любые 3 точки проходит либо окружность, либо орицил, либо эквидистанта.

Задача 3.6. а) Если a и b — катеты прямоугольного треугольника, а c — его гипотенуза, то $\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \operatorname{ch} c$ *(“гиперболическая теорема Пифагора”).*

б) Проверьте, что $a^2 + b^2 = c^2 + o(\max(a, b, c)^2)$, т. е. при $a, b, c \ll 1$ гиперболическая теорема Пифагора переходит в обычную.

Задача 3.7. а) В прямоугольном треугольнике выполняется соотношение $\sin\alpha = \dfrac{l(a)}{l(c)}$, где $l(r)$ — длина окружности радиуса r.

Предостережение. Вероятно, придется воспользоваться формулой для длины окружности.

б) В произвольном треугольнике выполняется “теорема синусов”

$$\frac{l(a)}{\sin\alpha} = \frac{l(b)}{\sin\beta} = \frac{l(c)}{\sin\gamma}.$$

* * *

Задача 3.8. а) Стабилизатором точки i при действии $SL_2(\mathbb{R})$ на верхней полуплоскости является подгруппа $SO_2 \subset SL_2(\mathbb{R})$ матриц вида

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

б) Любая матрица из $SL_2(\mathbb{R})$ может быть ровно одним способом представлена в виде произведения kan, где

$$k = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}; \quad a = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1/r \end{pmatrix}; \quad n = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$