

Проективные преобразования

Задача 8.1. Найдите барицентрические координаты а) центра вписанной окружности; б) центра описанной окружности; в) ортоцентра.

Задача 8.2. Центральная проекция одной прямой на другую является проективным преобразованием.

- ▷ Говорят, что пары точек $\{a, b\}$ и $\{x, y\}$ проективной прямой делят друг друга гармонически, если двойное отношение (a, b, x, y) равно -1 .

Задача 8.3. а) Пусть двойное отношение (x_1, x_2, x_3, x_4) равно λ . Какие значения принимает двойное отношение при перестановках этих точек?

б) Найдите подгруппу S_4 , сохраняющую двойное отношение (любых) четверок точек и фактор S_4 по этой подгруппе.

в) Какие перестановки 4 точек сохраняют гармоническое деление? Какие значения принимает двойное отношение при остальных перестановках?

- ▷ Биективное преобразование проективной плоскости, переводящее прямые в прямые, называется *коллинеацией*.

Задача 8.4. Коллинеация сохраняет гармоническое деление.

Задача 8.5. Если биективное преобразование $\mathbb{P}^1(K)$ сохраняет гармоническое деление и оставляет на месте ∞ , то оно является автоморфизмом поля¹ K .

Задача 8.6. а) У поля \mathbb{R} нет нетривиальных автоморфизмов.

б) Любая коллинеация $\mathbb{R}P^2$ лежит в $PGL_3(\mathbb{R})$ (“теорема Мёбиуса–фон Штайудта”).

¹При желании, можно считать, что $K = \mathbb{R}$.