Экзаменационные задачи по курсу

"Современные методы выпуклой оптимизации"

Независимый Университет, лекции 4-14 сентября 2012г.

Задача 1 $\{1\}$ Найти минимум функции $f(x) = \left\{ R^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \right\} / \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ при ограничениях $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Можно ли утверждать что этот минимум единственный? Почему?

Задача 2 $\{1\}$ На комплексной плоскости нарисовать области из которых метод Ньютона сходится к одному из корней уравнения $z^3 = 1$ или не сходится.

Задача 3 $\{1\}$ Зафиксируем в R^n некоторую норму $\|\cdot\|$. Введем скалярное произведение $\langle s, x \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i x_i$ для точек $x, s \in R^n$. Двойственная норма $\|\cdot\|_*$ определяется по следующей формуле:

$$\|s\|_* = \max\{\langle s, x \rangle : \ \|x\| \leq 1\}.$$

Найти двойственные нормы в следующих случаях:

$$\begin{aligned} \|x\|_p &= \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right]^{1/p}, \quad p \geq 1, \\ \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \end{aligned}$$

Показать что $(\|\cdot\|_*)_* = \|\cdot\|$.

Задача 4 $\{1\}$ Зафиксируем в R^n некоторую норму $\|\cdot\|$. Относительно этой нормы, обозначим через $B_{\|\cdot\|}(v, r) = \{x : \|x - v\| \leq r\}$ единичный шар с центром в v и с радиусом r. Выписать аналитическую форму задачи нахождения шара максимального радиуса, содержащегося в многограннике заданном системой линейных неравенств

$$\langle a_i, x \rangle \ \leq \ b_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Задача 5 {2} Зафиксируем в R^n некоторую норму $\|\cdot\|$ и некоторую симметрическую матрицу $H = H^T$. Показать что соотношение

$$\langle Hx, x\rangle \geq \|x\|^2, \quad \forall x \in R^n$$

выполнено тогда и только тогда когда H положительно определена и

$$\langle H^{-1}x, x\rangle \leq \|x\|_*^2, \quad \forall x \in R^n$$

Задача 6 {2} Стандартное определение двойственной нормы вытекает из необходимости обеспечить выполнение неравенства Коши-Шварца:

$$\langle s, x\rangle \quad \leq \quad \|s\|_* \|x\| \quad \forall s, x \in R^n.$$

Поэтому условие липшицевости градиента функции $f(x)$ обычно записывают во взаимно двойственных нормах:

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_* \quad \leq \quad L\|x - y\| \quad \forall x, y \in R^n.$$

Вычислить константу Липшица для градиента функции $f(x) = \ln\left(\sum\limits_{i=1}^{n} e^{x_i}\right)$ на всем пространстве относительно нормы $\|\cdot\|_1$ для аргумента. Показать что эта функция строго выпукла.

Задача 7 {2} Пусть симметрическая матрица H положительно определена, а множество Q выпукло и замкнуто. Рассмотрим функцию

$$\phi(s) = \sup_{x \in Q}(\langle s, x\rangle - \tfrac{1}{2}\langle Hx, x\rangle).$$

1. Какова ее область определения? Что можно сказать о ее выпуклости и гладкости? Относительно произвольной нормы $\|\cdot\|$ для смещений в R^n, выпишите константу Липшица для ее градиента.

2. Что можно сказать о ее сильной выпуклости? Рассмотрите случай $Q = R^n$ и $Q \neq R^n$. Какова будет константа сильной выпуклости?

Задача 8 {2} В пространстве M^n квадратных $n \times n$-матриц скалярное произведение принято вводить следующим образом:

$$\langle S, X\rangle_F \quad = \quad \sum_{i,j=1}^{n} S_{i,j} X_{i,j} \quad S, X \in M^n.$$

Это произведение определяет и фробениусову матричную норму $\|X\|^2 = \langle X, X\rangle_F$. Таким образом, градиент от матричной функции $f(X)$ может быть найден с помощью соотношения

$$f(X + H) \quad = \quad f(X) + \langle \nabla f(X), H\rangle_F + o(\|H\|_F).$$

Получите из этого определения формулу для градиента матричной полиномиальной функции $f(X) = \det(X)$.

Задача 9 $\{3\}$ В пространстве S^n симметрических $n \times n$-матриц скалярное произведение вводится с помощью соответствующего сужения скалярного произведения в M^n. Считая матрицу X положительно определенной, получите для функций $f_1(X) = \mathrm{Trace} X^{-1}$ и $f_2(X) = -\ln \det(X)$ формулы для их градиентов и для вторых производных этих функций вдоль (матричного) направления H.

Задача 10 $\{3\}$ Пусть выпуклая функция $f(x)$ имеет открытую область определения Q. Эта функция называется самосогласованным барьером если при любом x из Q и любом направлении h частные производные функции $\phi(t) = f(x+th)$ в нуле связаны следующими неравенствами:

$$\phi'''(0) \;\leq\; 2[\phi''(0)]^{3/2}, \quad [\phi'(0)]^2 \;\leq\; \nu\phi''(0).$$

Константа ν называется параметром барьера.

В пространстве $M^{n,m}$ матриц размером $n \times m$ рассмотрим надграфик матричной спектральной нормы $K = \{(t,X) \in R \times M^{n,m} : t \geq \|X\|\}$, где $\|X\| = \max\limits_y \{\|Xy\|_2 : \|y\|_2 \leq 1\}$. Покажите что это множество может быть представлено с помощью следующих матричных неравенств:

$$\begin{aligned} K &= \{(t,X) \in R_+ \times M^{n,m} : t^2 I_n \succeq XX^T\} \\ &\equiv \{(t,X) \in R_+ \times M^{n,m} : t^2 I_m \succeq X^T X\}, \end{aligned}$$

где R_+ - это множество неотрицательных чисел, I_k - это единичная матрица из S^k, а неравенство $A \succeq B$ означает что матрица $A - B$ неотрицательно определена.

Показать что обе функции $f_1(t,X) = -\ln\det(t^2 I_n - XX^T)$ и $f_2(t,X) = -\ln\det(t^2 I_m - X^T X)$ являются самосогласванными барьерами для K. Вычислить их параметры. Какой барьер лучше?

Задача 11 $\{3\}$ Градиентный метод с постоянным шагом применяется для безусловной минимизации выпуклой функции с Липшицевым градиентом. Какую скорость убывания невязки по функции он обеспечивает? Что можно сказать о скорости убывания нормы градиента? Ответ обоснуйте.

Задача 12 $\{3\}$ Выберем целочисленный вектор $a \in R^n$. Покажите что число $N(a)$ булевских решений (с коэффициентами $x_i = \pm 1$) однородного уравнения $\sum\limits_{i=1}^n a_i x_i = 0$ определяется по формуле

$$N(a) \;=\; 2^n \tfrac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \prod\limits_{i=1}^n \cos(a_i t) dt.$$