Задачи экзамена по курсу ‘‘А нужен ли выбор?’’

декабрь 2012 года

1. Организационные условности

Решения экзамена можно оставлять на вахте в НМУ для Раскина, передавать мне лично, найдя в НМУ или в МГУ, или посылать по электронной почте raskin@mccme.ru Экзамен проходит три недели после 05.12.2012. В четверг, 27.12.2012, я планирую утром взять на вахте и найти в почте последние сданные работы.

Работы, сданные ещё в 2012 году, я засчитаю, но проверять их начну уже в январе. С другой стороны, я обязуюсь приложить усилия к тому, чтобы работы сданные в первые две недели экзамена (до 19.12.2012), проверить до 20.12.2012 (ну мало ли кто по какому календарю год закрывает...)

Просьба выбирать задачи так, чтобы можно было увидеть применение разных частей курса. Для данного курса должно быть особенно понятно, что оцениваться будет не только и не столько решение отдельных задач, сколько умение производить убедительные теоретико-множественные построения.

Предупреждение: среди задач есть умышленно вставленные очень трудные (которые я полностью решать не умею и, возможно, за две недели их решить нельзя). Задачи не упорядочены ни по какому разумному правилу.

Пункты одной задачи не обязательно делать все сразу (и даже по порядку). Неполные решения тоже будут оцениваться (то есть найти разумное предположение, в котором утверждение доказывается или опровергается, но не выяснить, совместно ли предположение или его отрицание с ZFC — это лучше, чем не записывать задачу). Сдача работы до срока не лишает права сдавать дополнительно записанные задачи (в том числе, исправленные решения уже сданных) в течении оставшегося времени.

2. Математические условности

2.1. Непротиворечивость

Можно считать, что ‘‘наши представления о натуральных числах’’ таковы, что PA, ZFC и NF непротиворечивы, их непротиворечивость непротиворечива и т.д. Однако при использовании этого необходимо явно указывать до какого уровня нам это нужно.

2.2. ‘‘Существует ли’’

Интересует и ‘‘может и существовать’’ и ‘‘обязано ли существовать’’. Частичные решения (в том числе с дополнительными правдоподобными предположениями) проверяются на соответствие заявленному результату.

2.3. Теории множеств

По умолчанию рассматривается ZFC. Задачи, сохраняющие смысл в ZF, NF, NFU, $NFU+Infinity$, $NFU+Infinity+Choice$, $NF+AxCount$, $ZF\setminus Infinity$, $ZF+DC$, можно считать поставленными во всех применимых теориях множеств (и при решении указывать, какие варианты нижележащей теории рассматриваются).

2.4. Ординалы и кардиналы

Ординал — это порядковый тип вполне упорядоченного множества. В $ZF*$ определением считается определение через транзитивное множество транзитивных множеств, в $NF*$ — через множество изоморфных порядков.

Кардинал — это выражение мощности. В $ZF*$ это ординал, не равномощный ни одному своему элементу, в $NF*$ — множество множеств, равномощных некоторому заданному.

2.5. Натуральные числа

В $ZF*$ натуральные числа — элементы минимаьного непустого ординала, не имеющего предыдущего. В $NF*$ — можно рассматривать мощности неравномощных своим подмножествам (конечных) множеств или элементы пересечения всех индуктивных множеств.

3. Задания

3.1. Много ординалов в одном множестве

а) Существует ли непустое множество X бесконечных ординалов, которое содержит для каждого ординала $\alpha \in X$ некоторый ординал, равномощный множеству всех подмножеств α?

б) Существует ли непустое множество X бесконечных ординалов, такое что одновременно:

1) Для любого ординала $\alpha \in X$ в X есть ординал, равномощный множеству всех подмножеств α;

2) Для любого отображения $f : \mathbb{N} \to X$ в X есть ординал, больший всех элементов Imf?

в) Существует ли непустое множество X бесконечных ординалов, такое что одновременно:
1) Для любого ординала $\alpha \in X$ в X есть ординал, равномощный множеству всех подмножеств α;
2) Для любых ординала $\alpha \in X$ и отображения $f : \alpha \to X$, в X есть ординал, больший всех элементов Imf?

3.2. Нетранзитивная теория множеств

Если отказаться от аксиомы бесконечности, может ли существовать множество, не имеющее транзитивного замыкания?

3.3. $\mathbb{N}$ в $NF*$

Могут ли два определения натуральных чисел в $NF*$ не совпадать?

3.4. Падение мощности

Как мы знаем, множество X большой мощности в модели M может иметь счётную мощность в модели $N \supset M$. А может ли быть так, что $X \in M$ равномощно (в M) множеству всех подмножеств $\mathbb{R}$, а в некотором расширении $N \supset M$ множество X равномощно:
а) $\mathbb{R}_M$?
б) $\mathbb{R}_N$?

3.5. Двойная конструктивность

Рассмотрим M — модель ZFC. Построим в ней подмодель L из всех конструктивных множеств. Обязаны ли все множества модели L лежать в конструктивных слоях, построенных в модели L?

3.6. Плотность внешних множеств

Существуют ли счётная модель ZF и частично упорядоченное счётное множество в ней, такие, что любое внешнее плотное множество для этого ЧУМ тоже лежит в модели?

3.7. Внешние фильтры

Существуют ли счётная модель ZF и частично упорядоченное счётное множество P в ней, такие, что:
а)любой фильтр общего положения на P лежит в базовой модели?
б)некоторый фильтр общего положения на P лежит в базовой модели?

в)некоторый фильтр общего положения на P лежит в базовой модели, а некоторый другой не лежит?

3.8. Тройка фильтров попарно общего положения

Существуют ли три частично упорядоченных множества P_1, P_2, P_3 и три фильтра F_n на P_n, такие что любое попарное произведение фильтров является фильтром общего положения, но $F_1 \times F_2 \times F_3$ фильтром общего положения не является?

3.9. Разные одинаковые модели

Пусть взято стандартное частично упорядоченное множество фрагментов P_ξ для некоторого несчётного ординала ξ.
а)Существуют ли два фильтра общего положения на этом ЧУМ, такие что расширения по ним не являются изоморфными моделями?
б) Эквивалентен ли изоморфизм расширений их совпадению?

3.10. Маленькие множества

Представьте отрезок $[0;1]$ в виде явно заданного объединения множества первой категории и множества меры нуль.

3.11. Случайные уравнения

а) Существует ли многочлен со случайными коэффициентами и неслучайным корнем?
б) Существует ли многочлен со случайными коэффициентами и корнем, лежащим в базовой модели?
в) Существует ли многочлен со случайными коэффициентами, все корни которого неслучайны?

3.12. Внешне конечные множества

Докажите, что любое множество в NF, мощность которого является внешним натуральным числом, строго канторово.

3.13. Сверхпоследовательности

Рассмотрим стандартное расширение N модели M с недостижимым кардиналом Ω по фильтру G на P^Ω, схлопывающее все достижимые мощности в счётную мощность. Верно ли, что для любого ординала ξ и для любого отображения f из ξ в ординалы, лежащего (как множество пар) в N, f лежит уже в $M[G^\alpha]$? Здесь G^α, как и ранее, равно $G \cap P^\alpha$ для некоторого $\alpha < \Omega$.

3.14. Грани случайных чисел

Существует ли множество случайных вещественных чисел, точная верхняя грань которого неслучайна?

3.15. Неизбежные случайности

Пусть у нас есть расширение модели M по фильтру общего положения $F_1 \times F_2$ на произведении ЧУМ $P_1 \times P_2$, причём P_1 изоморфно P_2.

а) Может ли некоторое число x лежать и быть случайным и в $M[F_1]$ и в $M[F_2]$?

б) Могут ли все случайные числа в $M[F_1]$ лежать и быть случайными в $M[F_2]$?