Задачи экзамена по курсу ‘‘А нужен ли выбор?’’

декабрь 2012 года

1. Организационные условности

Решения экзамена можно оставлять на вахте в НМУ для Раскина, передавать мне лично, найдя в НМУ или в МГУ, или посылать по электронной почте raskin@mccme.ru Экзамен проходит четыре недели после 30.01.2013. В понедельник, 04.03.2013, я планирую утром взять на вахте и найти в почте последние сданные работы.
Продолжая традицию уважения к потребности закрытия года у пользователей разных календарей, решения сданные в первую неделю экзамена, до 7 февраля, я постараюсь проверить до 9 февраля.
Просьба выбирать задачи так, чтобы можно было увидеть применение разных частей курса. Для данного курса должно быть особенно понятно, что оцениваться будет не только и не столько решение отдельных задач, сколько умение производить убедительные теоретико-множественные построения.
Предупреждение: среди задач есть умышленно вставленные очень трудные (которые я полностью решать не умею и, возможно, за две недели их решить нельзя). Задачи не упорядочены ни по какому разумному правилу.
Пункты одной задачи не обязательно делать все сразу (и даже по порядку). Неполные решения тоже будут оцениваться (то есть найти разумное предположение, в котором утверждение доказывается или опровергается, но не выяснить, совместно ли предположение или его отрицание с ZFC — это лучше, чем не записывать задачу). Сдача работы до срока не лишает права сдавать дополнительно записанные задачи (в том числе, исправленные решения уже сданных) в течении оставшегося времени.

2. Математические условности

2.1. Непротиворечивость

Можно считать, что ‘‘наши представления о натуральных числах’’ таковы, что PA, ZFC и NF непротиворечивы, их непротиворечивость непротиворечива и т.д. Однако при использовании этого необходимо явно указывать до какого уровня нам это нужно.

2.2. ‘‘Существует ли’’

Интересует и ‘‘может и существовать’’ и ‘‘обязано ли существовать’’. Частичные решения (в том числе с дополнительными правдоподобными предположениями) проверяются на соответствие заявленному результату.

2.3. Теории множеств

По умолчанию рассматривается ZFC. Задачи, сохраняющие смысл в ZF, NF, NFU, $NFU+Infinity$, $NFU+Infinity+Choice$, $NF+AxCount$, $ZF\setminus Infinity$, $ZF+DC$, можно считать поставленными во всех применимых теориях множеств (и при решении указывать, какие варианты нижележащей теории рассматриваются).

2.4. Ординалы и кардиналы

Ординал — это порядковый тип вполне упорядоченного множества. В $ZF*$ определением считается определение через транзитивное множество транзитивных множеств, в $NF*$ — через множество изоморфных порядков.

Кардинал — это выражение мощности. В $ZF*$ это ординал, не равномощный ни одному своему элементу, в $NF*$ — множество множеств, равномощных некоторому заданному.

2.5. Натуральные числа

В $ZF*$ натуральные числа — элементы минимаьного непустого ординала, не имеющего предыдущего. В $NF*$ — можно рассматривать мощности неравномощных своим подмножествам (конечных) множеств или элементы пересечения всех индуктивных множеств.

3. Задания

3.1. Нетранзитивная теория множеств

Если отказаться от аксиомы бесконечности, может ли существовать множество, не имеющее транзитивного замыкания?

3.2. $\mathbb{N}$ в $NF*$

Могут ли два определения натуральных чисел в $NF*$ не совпадать?

3.3. Плотность внешних множеств

Существуют ли счётная модель ZF и частично упорядоченное счётное множество в ней, такие, что любое внешнее плотное множество для этого ЧУМ тоже лежит в модели?

3.4. Тройка фильтров попарно общего положения

Существуют ли три частично упорядоченных множества P_1, P_2, P_3 и три фильтра F_n на P_n, такие что любое попарное произведение фильтров является фильтром общего положения, но $F_1 \times F_2 \times F_3$ фильтром общего положения не является?

3.5. Разные одинаковые модели

Пусть взято стандартное частично упорядоченное множество фрагментов P_ξ для некоторого несчётного ординала ξ.
а)Существуют ли два фильтра общего положения на этом ЧУМ, такие что расширения по ним не являются изоморфными моделями?
б) Эквивалентен ли изоморфизм расширений их совпадению?

3.6. Внешне конечные множества

Докажите, что любое множество в NF, мощность которого является внешним натуральным числом, строго канторово.

3.7. Сверхпоследовательности

Рассмотрим стандартное расширение N модели M с недостижимым кардиналом Ω по фильтру G на P^Ω, схлопывающее все достижимые мощности в счётную мощность. Верно ли, что для любого ординала ξ и для любого отображения f из ξ в ординалы, лежащего (как множество пар) в N, f лежит уже в $M[G^\alpha]$? Здесь G^α, как и ранее, равно $G \cap P^\alpha$ для некоторого $\alpha < \Omega$.

3.8. Неизбежные случайности

Пусть у нас есть расширение модели M по фильтру общего положения $F_1 \times F_2$ на произведении ЧУМ $P_1 \times P_2$, причём P_1 изоморфно P_2.

а) Может ли некоторое число x лежать и быть случайным над базовой моделью и в $M[F_1]$ и в $M[F_2]$?

б) Могут ли все случайные числа в $M[F_1]$ лежать и быть случайными над базовой моделью в $M[F_2]$?

3.9. Размер внешних натуральных чисел

Может ли множество натуральных чисел в модели быть с внешней точки зрения равномощно

а) ‘‘внешнему’’ множеству $\mathbb{R}$?

б) множеству, которое представляет в модели $\mathbb{R}$?

3.10. Модели и ординалы

Дана модель M теории ZFC и транзитивная подмодель N. Может ли множество α

а) быть ординалом в M, но не быть в N?

б) быть ординалом в N, но не быть в M?

3.11. Сила выбора

Для каких мощностей ЧУМ выполняется лемма Цорна во всех моделях теории множеств $ZF + DC$?

3.12. Фильтры слишком общего положения

Существуют ли модель M теории ZFC и ЧУМ P в модели M, такие что существует фильтр общего положения на P, не лежащий в M, но не существует фильтра общего положения на P, пересекающегося со всеми ‘‘внешними’’ плотными множествами на P?

3.13. Вынужденное вынуждение

Пусть есть модель M теории ZFC и ЧУМ P в ней. Пусть есть два множества, заданных в расширениипо фильтру общего положения, $X(G)$ и $Y(G)$. Верно ли, что элемент $p \in P$ вынуждает $(X \subset Y) \vee (Y \subset X)$ тогда и только тогда, когда он вынуждает $X \subset Y$ или вынуждает $Y \subset X$?

3.14. Вложения в малые ординалы

Рассмотрим стандартное расширение N модели M с недостижимым кардиналом Ω по фильтру G на P^{Ω}, схлопывающее все достижимые мощности в счётную мощность.

Какова мощность в N множества всех вложений в M ординала ω во всевозможные ординалы $\alpha < \Omega$.

3.15. NF и непрерывность

Сформулируйте и докажите в NF теорему о принятии непрерывной функцией всех действительных значений.