ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ГРУППЫ 1: Метрические пространства и компакты.

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим.

Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 21 день после выдачи, 1, если между 21 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

1.1. Метрические пространства и полнота.

Замечание. Этот листочек плохо подходит для первоначального ознакомления с понятиями метрической топологии. Он будет полезен для тех, кто уже когда-то изучил эту науку, и хочет освежить ее в памяти.

Определение 1.1. **Метрическое пространство** есть множество X, снабженное такой функцией $d:\ X\times X\to \mathbb{R}\cup\infty$, что

а. Для любых $x,y\in X$ имеем $d(x,y)\geqslant 0$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x=y$.

б. Симметричность: $d(x,y)=d(y,x)$

в. “Неравенство треугольника”: для любых $x,y,z\in X$,

$$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z).$$

Функция d, удовлетворяющая этим условиям, называется **метрикой**. Число $d(x,y)$ называется “расстоянием между x и y”. **Изометрия**, или **изоморфизм метрических пространств** есть биекция, сохраняющая метрику.

Задача 1.1. Докажите, что $\mathbb{R}^n$ с обычной ("евклидовой") метрикой

$$d((x_1,x_2,...,x_n),(y_1,y_2,...,y_n)):=\sqrt{\sum_i (x_i-y_i)^2}$$

– метрическое пространство.

Определение 1.2. Если $x\in X$ – точка, а ε – вещественное число, множество

$$B_\varepsilon(x)=\{y\in X\ \ |\ \ d(x,y)<\varepsilon$$

называется **(открытый) шар радиуса ε с центром в x**. Такой шар еще называется **ε-шар**. **Замкнутый шар** определяется как

$$\overline{B}_\varepsilon(x)=\{y\in X\ \ |\ \ d(x,y)\leqslant\varepsilon\}.$$

Определение 1.3. Пусть (X, d) – метрическое пространство, а $\{a_i\}$ – последовательность точек из X. Последовательность $\{a_i\}$ называется **последовательностью Коши**, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется ε-шар в X, содержащий все a_i, кроме конечного числа.

Определение 1.4. Пусть A – подмножество в X. Элемент $c \in X$ называется **предельной точкой** подмножества A, если в любом открытом шаре, содержащем c, содержится бесконечное количество элементов A. Объединение A и всех предельных точек A называется **замыканием** A.

Определение 1.5. Пусть $\{a_i\}$ – последовательность точек X. Мы говорим, что $\{a_i\}$ **сходится к** $x \in X$, или **имеет предел в** x (пишется

$$\lim_{i \to \infty} a_i = x),$$

если в любом ε-шаре с центром в x содержатся почти все члены $\{x_i\}$

Определение 1.6. Метрическое пространство (X, d) называется **полным**, если любая последовательность Коши в X имеет предел.

Определение 1.7. Подмножество $A \subset X$ метрического пространства называется **плотным**, если в каждом открытом шаре в X содержится элемент из A.

Определение 1.8. Пусть X – подмножество метрического пространства $\bar{X}$. Скажем, что $\bar{X}$ называется **пополнением** X, если X плотно в $\bar{X}$, а $\bar{X}$ полно.

Задача 1.2. Докажите, что замкнутое подмножество полного метрического пространства полно.

Задача 1.3. Докажите, что пополнение X единственно (с точностью до изоморфизма), если оно существует.

Задача 1.4. Докажите существование пополнения.

Определение 1.9. Подмножество $A \subset X$ метрического пространства называется **нигде не плотным**, если ни для какого открытого шара $B_\varepsilon(x) \subset X$, пересечение $A \cap B_\varepsilon(x)$ не плотно в $B_\varepsilon(x)$.

Задача 1.5. Докажите, что замыкание нигде не плотного подмножества $A \subset X$ нигде не плотно.

Задача 1.6. Пусть X – континуальное, полное метрическое пространство. Предположим, что X содержит плотное, счетное подмножество. Докажите, что у X есть континуальное, нигде не плотное подмножество.

Задача 1.7 (!). (теорема Бэра о категории) Пусть X – полное метрическое пространство. Докажите, что X нельзя представить в виде счетного объединения нигде не плотных подмножеств.

Задача 1.8. Докажите, что пересечение счетного числа плотных, открытых подмножеств полного метрического пространства X плотно в X.

Задача 1.9 (*). Докажите, что не существует функции $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, которая непрерывна в рациональных точках, и разрывна в иррациональных.

Указание. Для заданного $\varepsilon > 0$, рассмотрим функцию

$$\rho_\varepsilon(z) := \sup_\delta\{\delta > 0 \mid \operatorname{diam}(f(B_\delta(z))) \leqslant \varepsilon\}.$$

Докажите, что $z \longrightarrow \rho_\varepsilon(z)$ липшицева, и $\bigcup_\varepsilon \rho_\varepsilon^{-1}(0)$ – множество всех точек, где f разрывна. Примените теорему Бэра.

Задача 1.10 (**). Докажите, что поточечный предел непрерывных функций $f_i: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ не может быть всюду разрывен.

1.2. Топология на метрических пространствах

Определение 1.10. Множество всех подмножеств M обозначается 2^M. **Топология** на M есть набор подмножеств $S \subset 2^M$, называемых **открытыми подмножествами**. Множество M называется **топологическим пространством**, а S – **топологией** на M, если выполнены следующие условия.

1. Пустое множество и само M открыты.
2. Объединение любого числа открытых подмножеств открыто.
3. Пересечение конечного числа открытых подмножеств открыто.

Отображение $\phi: M \longrightarrow M'$ топологических пространств называется **непрерывным**, если прообраз каждого открытого множества открыт. Непрерывные отображения также называются **морфизмами** топологических пространств. **Изоморфизм** топологических пространств – это такой морфизм $\phi: M \longrightarrow M'$, что существует морфизм $\psi: M' \longrightarrow M$, обратный к ϕ (т.е. $\phi \circ \psi$ и $\psi \circ \phi$ – тождественные морфизмы). Изоморфизм топологических пространств традиционно называется **гомеоморфизмом**.

Подмножество $Z \subset M$ называется **замкнутым**, если его дополнение открыто. **Окрестность** точки $x \in M$ – это любое открытое подмножество M, которое ее содержит. **Окрестность** подмножества $Z \subset M$ – это любое открытое подмножество , которое его содержит.

Определение 1.11. Пусть M – метрическое пространство, $X \subset M$ подмножество. Подмножество X называется **открытым**, если оно вместе с каждой точкой содержит некоторый ε-шар с центром в этой точке, и **замкнутым**, если дополнение к X открыто.

Замечание. Таким образом, на каждом метрическом пространстве определяется **топология, индуцированная метрикой**.

Замечание. Топологическое пространство называется **хаусдорфовым**, если у любых двух точек $x \neq y$ найдутся непересекающиеся окрестности. В дальнейшем, все топологические пространства по умолчанию предполагаются хаусдорфовыми.

Задача 1.11. Пусть M – метрическое пространство. Докажите, что индуцированная на нем топология хаусдорфова.

Задача 1.12. Докажите, что отображение метрических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда сходящиеся последовательности переводятся в сходящиеся последовательности, а пределы в пределы.

Определение 1.12. Отображение $f: M \longrightarrow N$ метрических пространств называется **непрерывным в точке** x, если образ любой последовательности, сходящейся к x, сходится к $f(x)$.

Определение 1.13. Пусть $X \subset M$ – подмножество, а $U_i \subset M$ – набор открытых подмножеств. Говорят, что U_i – **покрытие** X, если $X \subset \bigcup U_i$. Если из $\{U_i\}$ выкинуть какое-то количество открытых множеств, и оно останется покрытием, то, что получится, называется **подпокрытие**.

Определение 1.14. Пусть M – топологическое пространство.

- M – **компакт**, или **компактное множество**, если из любого покрытия M можно выбрать конечное подпокрытие.
- M – **секвенциальный компакт**, если у любой последовательности есть сходящаяся подпоследовательность.
- M – **псевдокомпакт**, если каждая непрерывная функция $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ ограниченна.

Замечание. Для метрических пространств, все эти определения эквивалентны; доказательство см. дальше в листочке.

Задача 1.13. Пусть M – псевдокомпакт. Докажите, что любая непрерывная функция $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ принимает значение $\mathsf{sup} f$ на M

Указание. Проверьте, что функция $\frac{1}{C-f}$ непрерывна в тех точках, где $f \neq C$, и примените определение псевдокомпактности к $C = \mathsf{sup} f$.

Задача 1.14. Пусть – секвенциально компактное топологическое пространство. Докажите, что оно псевдокомпактно.

1.3. ε-сети

Определение 1.15. **ε-сеть** в метрическом пространстве M есть такое множество $N \subset M$, что объединение ε-шаров с центрами в N равно M. Метрическое пространство называется **вполне ограниченным**, если для любого $\varepsilon > 0$ в M найдется конечная ε-сеть.

Задача 1.15 (*). Пусть M – вполне ограниченное метрическое пространство. Верно ли, что из любой ε-сети можно выбрать конечное подмножество, которое тоже будет ε-сетью?

Определение 1.16. ε-сеть N называется **δ-разделенной**, если для любых $a \neq b \in N$, имеем $d(a,b) \geqslant \delta$.

Задача 1.16. Пусть N – ε-сеть в метрическом пространстве. Докажите, что из N можно выбрать ε-разделенную 2ε-сеть (иначе говоря, какое-то подмножество N является ε-разделенной 2ε-сетью).

Задача 1.17. Пусть M – вполне ограниченное метрическое пространство, а N – δ-разделенная ε-сеть. Докажите, что N конечна.

Указание. Выберите в M конечную $\frac{\delta}{2}$-сеть N', и докажите, что в каждом $\frac{\delta}{2}$-шаре с центром в N' содержится не больше одного элемента N.

Задача 1.18 (!). Пусть N – ε-сеть во вполне ограниченном пространстве. Докажите, что из нее можно выбрать конечную 2ε-сеть.

Указание. Используйте задачу 1.16 и задачу 1.17.

Задача 1.19. Пусть M – секвенциально компактное метрическое пространство. Докажите, что оно

а. вполне ограниченно.

б. полно.

Задача 1.20. Пусть M – полное, вполне ограниченное метрическое пространство. Докажите, что оно секвенциально компактно.

1.4. Теорема Гейне-Бореля

Определение 1.17. Пусть (M_1, d_1) и (M_2, d_2) - метрические пространства, а $C > 0$ - вещественное число. Отображение $f: M_1 \longrightarrow M_2$ называется C**-липшицевым**, если для любых $x, y \in M_1$,
$$d_2(f(x), f(y)) \leqslant C d_1(x, y).$$

Функция $M \longrightarrow \mathbb{R}$ на метрическом пространстве называется C-липшицевой, если соответствующее отображение C-липшицево относительно естественной метрики на M и $\mathbb{R}$.

Замечание. Липшицевы функции непрерывны.

Задача 1.21. Докажите, что расстояние $d_z(x) := d(z, x)$ до фиксированной точки $z \in M$ - 1-липшицева функция.

Задача 1.22 (!). Докажите, что инфимум набора C-липшицевых функций, заданных на метрическом пространстве с конечной метрикой – это C-липшицева функция либо $-\infty$.

Задача 1.23. Пусть $Z \subset M$ – замкнутое подмножество в метрическом пространстве, а $d(x, Z) := \inf_{z \in Z} d(x, z)$. Докажите, что $d(x, Z)$ – 1-липшицева функция от x.

Задача 1.24. Пусть $\{f_i : M \longrightarrow \mathbb{R}\}$ – последовательность непрерывных функций на топологическом пространстве M, таких, что $|f_i| \leqslant C$. Следует ли из этого, что функция $F(z) := \inf_i f_i(z)$ непрерывна?

Задача 1.25. Пусть $\{x_i\}$ – последовательность попарно различных точек в метрическом пространстве, не имеющая сходящихся подпоследовательностей, а $f(y) := \inf_i(d_{x_i}(y) + \frac{1}{i})$. Докажите, что $f > 0$, но не достигает минимума.

Задача 1.26 (!). Докажите, что псевдокомпактность равносильна секвенциальной компактности.

Задача 1.27. Пусть $\{U_i\}$ – покрытие метрического пространства M, а

$$\delta(x) := \mathsf{sup}_i(d(x, M\backslash U_i)).$$

Докажите, что функция δ непрерывна и положительна.

Задача 1.28. Пусть M – псевдокомпактное метрическое пространство, $\{U_i\}$ – его покрытие, а $\delta(x)$ – функция, определенная выше. Докажите, что $\delta(x) > \varepsilon$ для какого-то вещественного числа $\varepsilon > 0$.

Задача 1.29. Пусть $\{U_i\}$ – покрытие метрического пространства. Докажите, что множество вещественных чисел $\varepsilon \geqslant 0$, таких, что для любой точки $x \in M$, ε-шар с центром в x целиком содержится в одном из U_i, есть отрезок вида $[0, \delta]$, $[0, \delta[$, где $\delta \in [0, \infty]$.

Замечание. Число δ из предыдущей задачи называется **числом Лебега** покрытия, обозначается $\delta(\{U_i\})$.

Задача 1.30 (!). (лемма Лебега) Пусть M – псевдокомпактное метрическое пространство, а $\{U_i\}$ его покрытие. Докажите, что $\delta(\{U_i\}) > 0$.

Задача 1.31. Пусть $\{U_i\}$ – покрытие M, $\varepsilon := \delta(\{U_i\}) > 0$.

а. Докажите, что существует ε-сеть $\{x_\alpha\}$ такая, что каждый $B_\varepsilon(x_\alpha)$ содержится в каком-то из U_i.

б. Докажите, что если M вполне ограничено, а $\varepsilon := \delta(\{U_i\}) > 0$, из $\{U_i\}$ можно выбрать конечное подпокрытие.

Задача 1.32 (!). Выведите из псевдокомпактности компактность.

Указание. Воспользуйтесь леммой Лебега и предыдущей задачей.

Задача 1.33 (!). Пусть M – метрическое пространство. Докажите равносильность следующих условий.

а. M компактно.

б. M секвенциально компактно

в. M псевдокомпактно

г. M полно и вполне ограниченно.

Задача 1.34 (*). Пусть M – компактное метрическое пространство, а $\phi: M \longrightarrow M$ – изометрическое вложение. Докажите, что ϕ биективно.

Задача 1.35 (*). Пусть M – компактное метрическое пространство, а $\phi: M \longrightarrow M$ – сюрьективное, 1-липшицево отображение. Докажите, что это изометрия.

Задача 1.36 (*). Пусть M – компактное метрическое пространство, а $\phi: M \longrightarrow M$ – непрерывное отображение, удовлетворяющее условию $d(f(x), f(y)) \geqslant d(x, y)$ для всех $x, y \in M$. Докажите, что это изометрия.