ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ГРУППЫ 3: Внутренние метрики.

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим.

Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 21 дней после выдачи, 1, если между 21 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

3.1. Длина пути в метрическом пространстве

Определение 3.1. Пусть (M,d) – метрическое пространство, а $\gamma: [a,b]\to M$ – путь. Рассмотрим разбиение отрезка $[a,b]=[a,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup ...\cup[x_{n-1},b]$. Обозначим $x_0:=a, x_n:=b$. Положим

$$L_\gamma(x_1,...x_{n-1})=\sum_{i=0}^{n-1} d(x_i,x_{i+1}).$$

Определим **длину пути** γ формулой

$$L_d(\gamma):=\sup_{a<x_1<...<x_{n-1}<b} L_\gamma(x_1,...x_{n-1}).$$

где супремум берется по всем разбиениям отрезка. Путь γ называется **спрямляемым**, если $L_d(\gamma)<\infty$.

Задача 3.1 (!). Пусть $\gamma: [a,b]\to M$ – спрямляемый путь в метрическом пространстве M, а $x_0(N)=a<x_1(N)<...<x_{n_N}(N)=b$ — последовательность разбиений отрезка, такая, что $\lim\limits_{N\to\infty}\max_i|x_i(N)-x_{i-1}(N)|=0$. Докажите, что $\lim\limits_{N\to\infty} L_\gamma(x_1(N),...,x_{n_N}(N))=L_d(\gamma)$.

Задача 3.2 (**). Верно ли это, если путь не спрямляемый?

Определение 3.2. Путь $\gamma: [a,b]\to M$ называется **кратчайшей**, если $L_d(\gamma)=d(a,b)$.

Задача 3.3. Пусть $\phi: [a,b]\to[a,b]$ – гомеоморфизм, а $\gamma: [a,b]\to M$ – какой-то путь. Докажите, что $L_d(\gamma)=L_d(\phi\circ\gamma)$.

Задача 3.4. Найдите все кратчайшие в $\mathbb{R}^n$ с обычной метрикой.

Задача 3.5 (*). Найдите все кратчайшие на сфере S^n, с римановой метрикой, полученной ограничением римановой формы с $\mathbb{R}^{n+1}$.

Задача 3.6. Пусть γ – спрямляемый путь в метрическом пространстве M, а $\phi: M\to M'$ – C-липшицево отображение. Докажите, что $\gamma\circ\phi$ – спрямляемый путь в M'.

Задача 3.7. Пусть $[a,b]=[a,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup...\cup[x_{n-1},b]$, а $\gamma: [a,b]\to\mathbb{R}^n$ – путь в $\mathbb{R}^n$ с обычной метрикой, причем $L_\gamma(x_1,...x_{n-1})\geqslant L_d(\gamma)-\varepsilon$, а $d(\gamma(x_i),\gamma(x_{i+1}))<\varepsilon$. Докажите, что γ находится в 3ε-окрестности объединения кратчайших, соединяющих $\gamma(a),\gamma(x_1),...,\gamma(x_{n-1}),\gamma(b)$.

Задача 3.8 (!). Пусть γ – спрямляемый путь в $\mathbb{R}^n$, с обычной метрикой. Докажите, что для каждого $\varepsilon>0$ образ γ содержится в объединении параллелепипедов суммарного объема $\leqslant\varepsilon$.

Задача 3.9. Постройте неспрямляемый путь в $\mathbb{R}^2$

Указание. Постройте кривую Пеано, сюрьективно отображающую $[0,1]$ на квадрат, и примените предыдущую задачу.

Задача 3.10 (*). Пусть M – метрическое пространство, содержащее непостоянный путь. Докажите, что в M существует неспрямляемый путь.

Задача 3.11 (**). Постройте линейно связное компактное метрическое пространство, в котором нет непостоянных спрямляемых путей, либо докажите, что такого не существует.

Задача 3.12. Пусть M – метрическое пространство, а $\gamma: [a,b] \to M$ – спрямляемый путь. Докажите, что $L_d(\gamma\Big|_{[a,c]})$ есть непрерывная функция точки $c \in [a,b]$.

3.2. Внутренние метрики

Напомним определение класса допустимых путей и функционала длины.

Определение 3.3. Пусть M – топологическое пространство. Говорится, что на M **задан класс допустимых путей**, если задано множество путей $[a,b] \to M$ такое, что

а. Для любых двух путей $[a,b] \xrightarrow{\gamma_1} M$ и $[b,c] \xrightarrow{\gamma_2} M$, удовлетворяющих $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, путь $\gamma: [a,c] \to M$, равный γ_1 на $[a,b]$ и γ_2 на $[b,c]$, тоже допустим. Такая операция называется "склейка путей".

б. Если $\phi: [a,b] \to [c,d]$ линейное отображение, а путь $\gamma: [c,d] \to M$ допустим, путь $\phi \circ \gamma$ тоже допустим.

в. Для каждого пути $[a,b] \xrightarrow{\gamma} M$, и отрезка $[c,d] \subset [a,b]$, ограничение $\gamma\Big|_{[c,d]}$ – тоже допустимый путь.

Определение 3.4. Пусть M – топологическое пространство, снабженное допустимым классом путей. Функционал $L(\gamma)$, отображающий допустимые пути в числа, называется **функционалом длины**, если он удовлетворяет следующим условиям.

а. (аддитивность длины) Для любого пути $\gamma: [a,c] \to M$, и любого $b \in [a,c]$, $L(\gamma) = L(\gamma\Big|_{[a,b]}) + L(\gamma\Big|_{[b,c]})$, где $\gamma\Big|_{[c,d]}$ обозначает ограничение пути, то есть функции $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}$ на отрезок $[c,d] \subset [a,b]$.

б. (непрерывность длины пути как функции от координат концов) Для любого пути $\gamma: [a,c] \to M$, функция $L(\gamma\Big|_{[a,b]})$ непрерывно зависит от $b \in [a,c]$.

в. Длина не меняется при замене параметра: если $\phi: [a,b] \to [c,d]$ – гомеоморфизм отрезков, а $\gamma: [c,d] \to M$ и $\phi \circ \gamma: [a,b] \to M$ – допустимые пути, то $L(\gamma) = L(\phi \circ \gamma)$.

г. (длина пути согласована с топологией) Пусть Z – замкнутое подмножество M, а $x \notin Z$ точка, не лежащая на Z. Тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что любой путь, соединяющий x с какой-то точкой Z, имеет длину $\geqslant \varepsilon$.

Задача 3.13. Пусть M – топологическое пространство, снабженное классом допустимых путей и функционалом длины. Определим функцию $d: M \times M \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ положив $d(x,y) := \inf_\gamma L(\gamma)$, где инфимум берется по всем путям, соединяющим x и y. Докажите, что это метрика.

Задача 3.14 (!). Пусть M – метрическое пространство, $\mathcal{S}$ – класс спрямляемых путей на M, а $L_d(\gamma)$ – длина пути. Докажите, что $\mathcal{S}$, L_d удовлетворяет условиям функционала длины.

Определение 3.5. Пусть (M,d) – метрическое пространство, $\mathcal{S}$ – класс спрямляемых путей на M, а $L_d(\gamma)$ – функционал длины. **Внутренняя метрика, связанная с** d есть внутренняя метрика, определенная по формуле $d(x,y) := \inf_\gamma L_d(\gamma)$, где инфимум берется по всем путям, соединяющим x и y; мы обозначаем ее $\hat{d}$.

Задача 3.15. Докажите, что $\hat{d} \geqslant d$, для любого метрического пространства (M,d).

Задача 3.16 (!). Пусть $\gamma_i:\ [a,b] \to M$ – последовательность спрямляемых путей, $L_d(\gamma_i) < C$, равномерно сходящаяся к $\gamma:\ [a,b] \to M$. Докажите, что γ спрямляемый, и любая предельная точка a последовательности $L_d(\gamma_i)$ удовлетворяет $L_d(\gamma) \leqslant a$. Приведите пример, когда $L_d(\gamma) \neq \lim L_d(\gamma_i)$.

Задача 3.17. Зададим функцию $d:\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ формулой

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1 - x_2| + \sqrt{|y_1 - y_2|}.$$

а. Докажите, что это метрика

б. Докажите, что $(\mathbb{R}^2, \hat{d})$ несвязно.

Задача 3.18 (!). Пусть (M,d) – метрическое пространство, $(M,\hat{d})$ – оно же с внутренней метрикой. Докажите, что для каждого спрямляемого пути γ в (M,d),

а. $L_d(\gamma) \leqslant L_{\hat{d}}(\gamma)$.

б. $L_d(\gamma) \geqslant L_{\hat{d}}(\gamma)$.

в. Выведите из этого, что $\hat{d} = \hat{\hat{d}}$.

Указание. Первое следует из $d \leqslant \hat{d}$ (докажите). Чтобы доказать второе, распишите

$$L_{\hat{d}}(\gamma) - \varepsilon_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \hat{d}(\gamma(x_i),\gamma(x_{i+1})) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=0}^{n_i-1} d(\gamma(x_{i,j}),\gamma(x_{i,j+1})) + \varepsilon_2 \right] \leqslant L_d(\gamma) + n\varepsilon_2,$$

где сумма в квадратных скобках берется по подходящим подразбиением отрезка $[x_i = x_{i,0}, x_{i+1} = x_{i,n_i}]$, а ε_i можно выбрать произвольно малым.

3.3. Внутренние метрики и функционалы длины

Задача 3.19. Пусть M – топологическое пространство с заданным на нем классом допустимых путей и функционалом длины L, а d – индуцированная L метрика.

а. Докажите, что каждый допустимый путь спрямляем относительно d.

б. Пусть L_d – функционал длины, связанный с d. Докажите, что $L_d \leqslant L$.

Определение 3.6. Пусть $\gamma_i: N \to M$ – последовательность отображений топологических пространств, N компактно. Эта последовательность **равномерно сходится** к $\gamma: N \to M$, если для любой окрестности U графика $\Gamma_\gamma \subset N \times M$, все графики Γ_{γ_i}, кроме конечного числа, лежат в U.

Определение 3.7. Пусть M – топологическое пространство, снабженное классом допустимых путей и функционалом длины $L(\gamma)$. Функционал L называется **полунепрерывным снизу**, если для любой последовательности допустимых путей $\gamma_i: [a,b] \to M$, равномерно сходящейся к допустимому пути $\gamma: [a,b] \to M$, имеем $\lim_i L(\gamma_i) \geqslant L(\gamma)$ для любой из предельных точек последовательности $L(\gamma_i)$.

Задача 3.20. Пусть (M,d) – метрическое пространство, L_d – функционал длины на спрямляемых путях. Докажите, что L_d полунепрерывен снизу.

Задача 3.21. Пусть M – топологическое пространство, снабженное классом допустимых путей и функционалом длины L, а d – индуцированная L метрика. Предположим, что L не полунепрерывный снизу. Докажите, что существует допустимый путь γ такой, что $L_d(\gamma) < L(\gamma)$.

Задача 3.22. Пусть M – топологическое пространство, снабженное классом допустимых путей и функционалом длины L, d – индуцированная L метрика, а $\gamma_i: [a,b] \to M$ – последовательность путей, равномерно сходящихся к $\gamma: [a,b] \to M$. Верно ли, что эта последовательность равномерно сходится к γ в топологии, индуцированной d?

Задача 3.23 (!). Пусть M – топологическое пространство, снабженное классом допустимых путей и функционалом длины L, d – индуцированная L метрика, а $\gamma: [a,b] \to M$ – допустимый путь.

а. Докажите, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует разбиение отрезка $[a,b] = [x_0 = a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup ... \cup [x_{n-1}, x_n = b]$, такое, что $\max_i L_d\left(\gamma\Big|_{[x_i, x_{i+1}]}\right) < \varepsilon$.

б. В этих условиях, пусть $\gamma_\varepsilon: [a,b] \to M$ – допустимый путь, удовлетворяющий $\gamma_\varepsilon(x_i) = \gamma(x_i)$ и $L_d(\gamma_\varepsilon\Big|_{[x_i, x_{i+1}]}) \leqslant L_d\left(\gamma\Big|_{[x_i, x_{i+1}]}\right)$. Докажите, что для каждого $t \in [a,b]$, имеем $d(\gamma_\varepsilon(t), \gamma(t)) \leqslant 3\varepsilon$.

в. Докажите, что $L_d(\gamma) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} L(\gamma_\varepsilon)$, где пути γ_ε выбраны как в предыдущем пункте.

г. Докажите, что γ_ε равномерно сходится к γ.

Задача 3.24 (!). Пусть M – топологическое пространство, снабженное классом допустимых путей и функционалом длины L, который полунепрерывен снизу. Докажите, что $L_d(\gamma) = L(\gamma)$ для любого допустимого пути.

Указание. Выведите неравенство $L_d(\gamma) \geqslant L(\gamma)$ из предыдущей задачи.

Задача 3.25 (!). Пусть M – топологическое пространство, снабженное классом допустимых путей и функционалом длины L, который полунепрерывен снизу, а d – связанная с ним метрика. Докажите, что $\hat{d} = d$.

Определение 3.8. Метрика d называется **внутренней**, если $d = \hat{d}$.

Задача 3.26. Пусть V – векторное пространство с нормой $|\cdot|$, а метрика d на V определена по формуле $d(v, v') = |v - v'|$. Является ли эта метрика внутренней?