ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ГРУППЫ 4: Графы и факторпространства

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим.

Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 21 дней после выдачи, 1, если между 21 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

4.1. Топология фактора

Замечание. Все топологические пространства в этом курсе предполагаются по умолчанию хаусдорфовыми. Фактор-пространства с топологией фактора представляют собой исключение: они, за редкими исключениями, нехаусдорфовы.

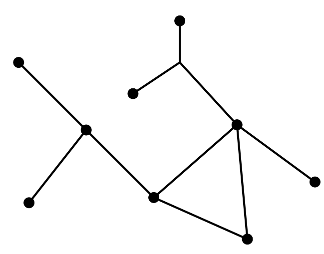
Определение 4.1. Пусть M – топологическое пространство, а $\sim$ – отношение эквивалентности. Множество классов эквивалентности обозначается $M/\sim$. На $M/\sim$ вводится **топология фактора**: открытые подмножества $M/\sim$ - такие подмножества, прообраз которых в M открыт. Если на M действует группа G, возникает естественное отношение эквивалентности: $x \sim y$ если существует такое $g \in G$, что $g \cdot x = y$. Фактор M по этому отношению эквивалентности называется **факторпространством** M **по действию** G, и обозначается M/G. Классы эквивалентности называются G-**орбитами** в M.

Задача 4.1. Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство, а G – конечная группа, которая действует на M гомеоморфизмами. Рассмотрим факторпространство M/G с топологией фактора. Докажите, что M/G хаусдорфово.

Указание. Пусть x, y – две точки, не принадлежащие одной и той же G-орбите. Найдите у x, y непересекающиеся G-инвариантные окрестности U, U', и возьмите $\bigcap_{g\in G} gU$, $\bigcap_{g\in G} gU'$.

Задача 4.2. Приведите пример, когда M хаусдорфово, а M/G нехаусдорфово (и группа, соответственно, не конечна).

Определение 4.2. Пусть Γ – некоторый граф, то есть набор данных вида "множество вершин" $\{\mathcal{V}\}$, "множество ребер" $\{\mathcal{R}\}$, и сведений о том, какие вершины являются концами каких ребер.



Более строго, Γ можно определить как пару множеств $\mathcal{V}$, $\mathcal{R}$ и сюрьективное отображение $\{\mathcal{R}\} \times \{0,1\} \xrightarrow{\Gamma} \{\mathcal{V}\}$. Введем на $\{\mathcal{R}\} \times [0,1]$, отношение эквивалентности, порожденное следующим: концы двух ребер эквивалентны, если они примыкают к одной и той же вершине. Это отношение эквивалентности склеивает концы ребер, не затрагивая внутренности отрезков. Фактор $\{\mathcal{R}\} \times [0,1]$ по этому отношению эквивалентности называется **топологическим пространством графа**.

Задача 4.3. Докажите, что топологическое пространство любого графа хаусдорфово.

Задача 4.4 (*). Пусть G – группа, действующая на $M = \mathbb{R}^n$ гомеоморфизмами, с двумя или больше орбитами. Может ли фактор M/G иметь кодискретную топологию (топологию, в которой открыто только само пространство и пустое множество)?

Задача 4.5 (**). Решите предыдущую задачу в предположении, что орбит ровно две.

Задача 4.6. Пусть $\{U_\alpha\}$ – открытое покрытие топологического пространства M. Рассмотрим несвязное объединение $M' := \coprod_\alpha U_\alpha$, и зададим на M' отношение эквивалентности таким образом: $x \sim y$, если их образы в M совпадают. Докажите, что $M'/\sim$ гомеоморфно M.

Задача 4.7 (*). Пусть M – топологическое пространство, а $\sim$ – отношение эквивалентности. Предположим, что **график** $\sim$ (то есть подмножество в $M \times M$, состоящее из всех пар точек (x,y) таких, что $x \sim y$) замкнуто. Следует ли из этого хаусдорфовость $M/\sim$ с топологией фактора?

4.2. Внутренняя метрика и локальность

Определение 4.3. Пусть (M,d) – метрическое пространство, а $\gamma: \ [a,b] \to M$ – путь. Рассмотрим разбиение отрезка $[a,b] = [a,x_1] \cup [x_1,x_2] \cup ... \cup [x_{n-1},b]$. Обозначим $x_0 := a, x_n := b$. Положим

$$L_\gamma(x_1,...x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i,x_{i+1}).$$

Определим **длину пути** γ формулой

$$L_d(\gamma) := \mathsf{sup}_{a<x_1<...<x_{n-1}<b} L_\gamma(x_1,...x_{n-1}).$$

где супремум берется по всем разбиениям отрезка. Путь γ называется **спрямляемым**, если $L_d(\gamma) < \infty$. Метрика d называется **внутренней**, если $d(x,y) = \inf_\gamma L_d(\gamma)$, где инфимум берется по всем путям, соединяющим x и y.

Задача 4.8. Пусть M, M' – метрические пространства, а $f: \ M \longrightarrow M'$ – непрерывная биекция, такая, что у каждой точки $x \in M$ есть окрестность U_x, причем ограничение $f\Big|_{U_x} : \ U_x \longrightarrow f(U_x)$ – изометрия.

а. Докажите, что f – гомеоморфизм.

б. Найдите f, удовлетворяющее этим условиям, и такое, что M и M' связные, но f не изометрия.

в. Пусть метрика в M внутренняя. Докажите, что f 1-липшицева: $d(x,y) \geqslant d(f(x), f(y))$.

г. Пусть метрика в M' внутренняя. Докажите, что $d(x,y) \leqslant d(f(x), f(y))$.

Замечание. Когда говорится "метрика на топологическом пространстве", по умолчанию предполагается, что эта метрика согласована с топологией.

Определение 4.4. Метрика d на топологическом пространстве M называется **локальной**, если для каждого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$, и для каждой метрики d' на M такой, что $d\Big|_{U_\alpha} = d'\Big|_{U_\alpha}$, имеем $d \geqslant d'$.

Задача 4.9. Пусть d – внутренняя метрика. Докажите, что d локальна.

Задача 4.10. Постройте метрику на $\mathbb{R}$, не внутреннюю, но удовлетворяющую $d(x,y) = |x-y|$ для любого $|x-y| \leqslant 1$.

Задача 4.11. Пусть d – метрика, а $d_\varepsilon(x,y) = \inf \sum_{i=0}^{n-1} d(p_i, p_{i+1})$, где $p_0 = x$, $p_n = y$, а инфимум берется по всем последовательностям p_i таким, что $d(p_i, p_{i+1}) < \varepsilon$. Докажите, что $d_\varepsilon = d$ на каждом шаре радиуса $\varepsilon/2$.

Задача 4.12 (*). Пусть d – полная метрика, такая, что $d = d_\varepsilon$, для любого $\varepsilon > 0$. Докажите, что d – внутренняя.

Задача 4.13 (*). Пусть d – полная локальная метрика. Докажите, что d – внутренняя.

4.3. Полуметрики на факторпространстве

Определение 4.5. Полуметрика на X есть функция $d: \ X \times X \to \mathbb{R}^{\geqslant 0} \cup \infty$, удовлетворяющая неравенству треугольника, $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$, $d(x,x) = 0$ и $d(x,y) = d(y,x)$, но (в отличие от метрики) не обязательно строго положительная при $x \neq y$.

Задача 4.14. Пусть d – полуметрика на X.

а. Докажите, что соотношение "$x \sim y$, если $d(x,y) = 0$" – отношение эквивалентности.

б. Докажите, что существует метрика d_0 на $X/\!\sim$ такая, что $d(x,y) = d_0(x_0, y_0)$, где $x_0, y_0 \in X/\!\sim$ – точки фактора, соответствующие x, y.

Задача 4.15. Пусть d_α – набор полуметрик, а $d(x,y) := \sup_\alpha d_\alpha(x,y)$. Докажите, что $d(x,y)$ – полуметрика.

Задача 4.16 (!). Пусть $\sim$ – отношение эквивалентности на метрическом пространстве (X,d). Определим функцию $d_\sim : \ X/\!\sim \times X/\!\sim \ \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ на факторе $X/\!\sim$ по формуле

$$d_\sim(x,y) = \inf \sum_{i=0}^{n-1} d(p_i, q_{i+1}),$$

где инфимум берется по всем наборам точек $p_i, q_i \in X$ таким, что $p_0 \sim x, q_n \sim y$, и $p_i \sim q_i$. Докажите, что $d_\sim$ – полуметрика на $X/\!\sim$.

Определение 4.6. Пусть $\sim$ – отношение эквивалентности на метрическом пространстве (X, d). Определенная выше полуметрика $d_\sim$ на $X/\!\sim$ называется **полуметрикой факторпространства**. **Метрическое факторпространство** получается из $X/\!\sim$ дополнительным отождествлением всех точек x, y таких, что $d_\sim(x, y) = 0$, с метрикой, которая индуцирована с $d_\sim$, как в задаче 4.14.

Задача 4.17 (!). Пусть $\sim$ – отношение эквивалентности на метрическом пространстве (X, d). Докажите, что $d_\sim(x, y) = \mathsf{sup}_\alpha d_\alpha(x, y)$, где $\{d_\alpha\}$ – множество всех полуметрик на $X/\!\sim$, удовлетворяющих $d_\alpha(p_0, q_0) \leqslant d(p, q)$ для любых $p_0, q_0 \in X/\!\sim$, и любых $p, q \in X$ в классах эквивалентности p_0, q_0.

Задача 4.18. Пусть $\sim$ – отношение эквивалентности на метрическом пространстве (X, d). Рассмотрим $X/\!\sim$ как топологическое пространство с топологией фактора, и пусть $(X/\!\sim, d_\sim)$ – топологическое пространство, с топологией, базой которой являются открытые $d_\sim$-шары.

а. Докажите, что тождественное отображение $X/\!\sim \longrightarrow (X/\!\sim, d_\sim)$ непрерывно.

б. Приведите пример, когда это отображение – не гомеоморфизм.

Задача 4.19. Пусть M – пространство с внутренней метрикой, а $\{U_\alpha\}$ – открытое покрытие M. Рассмотрим пространство $\coprod_\alpha U_\alpha$, с метрикой на U_α, индуцированной с M, и пусть $x \sim y$, если x и y отвечают одной и той же точке на M. Докажите, что M есть метрический фактор $\coprod_\alpha U_\alpha$ по $\sim$.

Задача 4.20 (!). Пусть G – группа, действующая на метрическом пространстве (X, d) изометриями, а $x \sim y$, если x и y лежат в одной орбите G. Докажите, что $d_\sim(a, b)$ есть инфимум расстояний между представителями a, b в X.

Задача 4.21 (*). Пусть G – группа, действующая на метрическом пространстве (X, d) изометриями, а d внутренняя. Докажите, что метрика на метрическом факторе – тоже внутренняя.

Задача 4.22 (!). Пусть $\Gamma \cong \mathbb{Z}^2$ свободно действует на $M = \mathbb{R}^2$ параллельными переносами, а (Z, d_Z) – **метрический фактор** M **по действию** Γ (т.е. метрический фактор M по соотношению эквивалентности $x \sim y$, если x и y лежат в одной орбите Γ). Докажите, что Z гомеоморфно тору либо изометрично $\mathbb{R}$.

Задача 4.23 (*). Пусть $\Gamma = \mathbb{Z}$ свободно действует на $M = \mathbb{R}^2$ поворотами. Докажите, что метрический фактор M/Γ изометричен $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$ с обычной метрикой.

Задача 4.24. Пусть M – область в $\mathbb{R}^2$, заданная неравенствами $0 \leqslant y \leqslant e^{-x}$, $x \geqslant 0$, а $\sim$ – отношение эквивалентности на M, склеивающее $x, 0$ с $(x + 1, e^{-x-1})$.

а. Докажите, что $d_\sim$ задает метрику на факторе $M/\!\sim$.

б. (*) Докажите, что сей фактор гомеоморфен замкнутому диску без точки.

в. (*) Верно ли, что метрическое пространство $(M/\!\sim, d_\sim)$ имеет бесконечный диаметр?

Задача 4.25 (!). Пусть $M = \mathbb{R}^2 \backslash 0$, с обычной метрикой. Рассмотрим отношение эквивалентности на M, полученное склейкой $(x, y) \sim (-y, 2x)$.

а. Докажите, что $d_\sim = 0$.

б. Докажите, что $\mathbb{R}^2\backslash 0/\sim$ с топологией фактора – это двумерный тор.

4.4. Метрические графы

Задача 4.26. Пусть $X = [0,1]$ отрезок с обычной метрикой, а $x \sim y$, если это концы отрезка или $x = y$. Докажите, что $d/\sim$ на $X/\sim$ – метрика на окружности, где расстояние между точками равно углу между ними умножить на константу.

Определение 4.7. **Несвязное объединение** метрических пространств (X_α, d_α) есть $\coprod X_\alpha$ с метрикой $d(x,y)$ которая равна $d_\alpha(x,y)$, когда x и y лежат в X_α, и ∞ в противном случае.

Определение 4.8. Пусть I_α – набор отрезков, изометричных $[0, x_\alpha]$, а $\sim$ – отношение эквивалентности, полученное склейкой некоторых вершин. Метрический фактор $\coprod_\alpha I_\alpha$ называется **метрическим графом**. Он называется **локально конечным**, если каждая точка отождествляется с конечным числом точек.

Задача 4.27. Пусть I_α – набор отрезков, изометричных $[0, x_\alpha]$, Γ – полученный из них метрический граф, а I_α^0 – их внутренности. Докажите, что естественное отображение $\coprod_\alpha I_\alpha^0 \longrightarrow \Gamma$ – вложение.

Задача 4.28. Докажите, что метрика на метрическом графе всегда внутренняя.

Задача 4.29 (*). Пусть M – компактный метрический граф. Может ли группа $\pi_1(M)$ быть бесконечно порожденной?

Задача 4.30. Пусть M – метрический граф, а M_0 – топологический граф, полученный как топологический фактор $\coprod_\alpha I_\alpha$ по тому же соотношению эквивалентности.

а. Докажите, что тавтологическое отображение $M_0 \xrightarrow{\tau} M$ непрерывно.

б. (!) Докажите, что для любого локально конечного графа, τ – гомеоморфизм.

в. (*) Постройте пример графа, для которого τ не биекция.

г. (*) Постройте пример графа, для которого τ биекция, но не гомеоморфизм.

4.5. Графы Кэли и метрика слов на группе

Определение 4.9. Пусть G – группа. Множество $S \subset G$ называется **набором образующих**, если все элементы G выражаются через произведения элементов x_i, x_j^{-1}, для каких-то $x_i, x_j \in S$. Каждое такое произведение называется **словом** от x_i, x_j^{-1}. В дальнейшем, мы будем предполагать по умолчанию, что любой набор образующих S содержит x^{-1} вместе с каждым $x \in S$.

Определение 4.10. Пусть G – группа, а $S \subset G$ – набор образующих. **Граф Кэли** G есть метрический граф, полученный следующим образом. Вершины графа Кэли суть элементы G, а ребра соединяют две вершины g, g', если $g' = gs$, где $s \in S$. Длины всех ребер графа Кэли равны 1.

Определение 4.11. Группа G называется **свободной**, если это фундаментальная группа букета окружностей.

Задача 4.31. Докажите, что граф Кэли группы односвязен тогда и только тогда, когда эта группа свободна.

Задача 4.32. Докажите, что любая подгруппа свободной группы свободна.

Определение 4.12. Пусть G – группа, а $S \subset G$ – набор образующих. **Метрика слов** d_S на группе есть метрика на G как на множестве вершин графа Кэли.

Задача 4.33. Пусть G – группа, $S \subset G$ – набор образующих, а d_S – метрика слов. Докажите, что $d_S(1, w)$ есть длина самого короткого слова $s_1 s_2 ... s_N$, $s_i \in S$, представляющего w.

Задача 4.34 (!). Пусть G – группа, а $S_1, S_2 \subset G$ – два конечных набора образующих. Докажите, что тождественное отображение $(G, d_{S_1}) \longrightarrow (G, d_{S_2})$ – липшицево.

Определение 4.13. Метрика d на группе G называется **левоинвариантной**, если $d(x, y) = d(gx, gy)$

Задача 4.35. Докажите, что метрика слов на группе левоинвариантна.

Определение 4.14. Две метрики d, d' на группе G называются **эквивалентными**, если тождественное отображение $(G, d) \longrightarrow (G, d')$ липшицево, и обратное к нему тоже липшицево.

Задача 4.36 (*). Постройте левоинвариантную метрику на группе $\mathbb{Z}$, не эквивалентную метрике слов, все шары в которой имеют конечное число элементов.

Задача 4.37 (*). Обозначим за $|B_r(z)|$ число элементов в r-шаре с центром в z. Постройте левоинвариантnую метрику на $\mathbb{Z}$, такую, что для каких-то констант $A, B > 0$, выполнено $e^{Ar} \geqslant |B_r(0)| \geqslant e^{Br}$ (для каждого $r > 0$).

Задача 4.38 (**). Пусть d – конечная левоинвариантная метрика на $\mathbb{Z}^n$, такая, что для каких-то констант $A, B > 0$ и любого r, $Ar^n \geqslant |B_r(0)| \geqslant Br^n$. Докажите, что d эквивалентна метрике слов.

Задача 4.39 (**). Пусть d – конечная левоинвариантная метрика на группе G, такая, что все шары имеют конечное число элементов, и задана константа $C > 0$, такая, что для любых $x, y \in G$ существует $z \in G$, удовлетворяющий $d(x, z) \leqslant \frac{d(x,y)}{2} + C$ и $d(y, z) \leqslant \frac{d(x,y)}{2} + C$. Докажите, что d эквивалентна метрике слов.