Гиперболические группы 9: Пространства, гиперболичные по Громову

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим.

Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

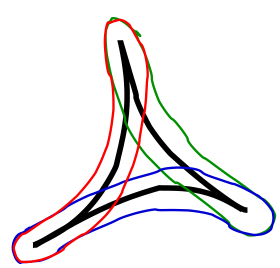
Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 21 дней после выдачи, 1, если между 21 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

9.1. δ-тонкие треугольники

Замечание. В этом разделе, все метрические пространства предполагаются по умолчанию наделенными строго внутренней метрикой (внутренней с кратчайшими). Кратчайшие же предполагаются наделенными геодезической параметризацией.

Определение 9.1. **Геодезический треугольник** $\triangle(abc)$ в метрическом пространстве есть треугольник, составленный из трех вершин a, b, c, соединенных кратчайшими, которые я буду обозначать за $[a, b], [b, c]$ и $[c, a]$. **Талия** треугольника есть супремум расстояния от точки z, лежащей на одной из сторон, до объединения двух других. Треугольник называется **δ-тонким (по Рипсу)**, если его талия не больше δ. Иначе говоря, каждая сторона такого треугольника лежит в δ- окрестности двух других.



Определение 9.2. Метрическое пространство X со строго внутренней метрикой называется **δ-гиперболическим**, если все геодезические треугольники δ-тонкие. Будем говорить, что X **гиперболично**, если оно δ-гиперболично для какой-то константы δ.

Замечание. Есть много разных определений гиперболичности. При этом, величина константы δ не имеет значения; когда говорят «определение А гиперболичности эквивалентно определению Б» это значит, что для какого-то числа $C > 0$ из δ-гиперболичности в смысле А следует $C\delta$-гиперболичность в смысле Б, а из δ-гиперболичности в смысле Б следует $C\delta$-гиперболичность в смысле А.

Замечание. Немного погодя, я определю δ-гиперболичность для произвольных метрических пространств (не обязательно с внутренней метрикой). Определение с тонкими треугольниками по Рипсу станет частным случаем более общего, эквивалентным ему (в смысле замечания 9.2).

Определение 9.3. **Дерево** есть связный метрический граф с тривиальной фундаментальной группой.

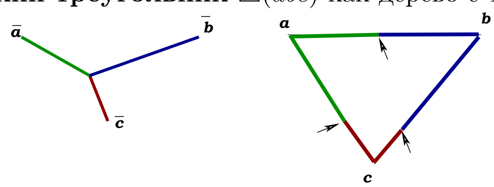
Задача 9.1. Докажите, что дерево 0-гиперболично.

Определение 9.4. Пусть $\phi: \ X \longrightarrow Y$ – отображение метрических пространств. **Кодиаметр** $\operatorname{codiam}\phi$ определяется формулой

$$\operatorname{codiam}(\phi) := \sup_{x,y\in X} |d(x,y) - d(\phi(x),\phi(y))|.$$

Он измеряет то, насколько ϕ отличается от изометрии.

Определение 9.5. Пусть $\triangle(abc)$ – геодезический треугольник. Определим **модельный 0-гиперболический треугольник** $\triangle(\bar a\bar b\bar c)$ как дерево с тремя вершинами



и тремя ребрами, соединенными в четвертой вершине, таким образом, что соответствующие расстояния равны: $|ab| = |\bar a\bar b|$, $|ac| = |\bar a\bar c|$, $|bc| = |\bar b\bar c|$.

Задача 9.2. а. Постройте отображение Ψ из точек (вершин и сторон) треугольника $\triangle(abc)$ в $\triangle(\bar a\bar b\bar c)$, задающее изометрию на каждой стороне и переводящее вершины в соответствующие им вершины.

б. Докажите, что такое Ψ единственно.

Задача 9.3. Пусть $\triangle(abc)$ – треугольник, а $b' \in [ab]$, $c' \in [ac]$ – точки на его сторонах.

а. Пусть $|b'c'| < \delta$. Докажите, что $||ab'| - |ac'|| < \delta$.

б. Пусть $d(b', [ac]) < \delta$, а $|ac'| = |ab'|$. Докажите, что $|b'c'| < 2\delta$.

Указание. Выведите б из а.

Задача 9.4. Пусть треугольник $\triangle(abc)$ δ-тонкий, а $\Psi: \ \triangle(abc) \longrightarrow \triangle(\bar a\bar b\bar c)$ – отображение в модельный треугольник, построенное выше. Докажите, что $\operatorname{codiam}\Psi \leqslant 2\delta$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей

Определение 9.6. Треугольник $\triangle(abc)$ называется **δ-тонким по Громову**, если отображение Ψ в модельный треугольник имеет кодиаметр $\leqslant \delta$.

Задача 9.5 (!). Докажите, что из δ-тонкости по Громову следует δ-тонкость по Рипсу, а из δ-тонкости по Рипсу следует 2δ-тонкость по Громову.

Определение 9.7. Треугольник называется δ-вырожденным, если две его стороны находятся в δ-окрестности третьей.

Задача 9.6 (*). Пусть X – δ-гиперболическое пространства а a' – точка на стороне $[bc]$ треугольника $\triangle(abc)$. Докажите, что треугольник $\triangle(aba')$ либо треугольник $\triangle(aca')$ – 2δ-вырожденный.

Задача 9.7 (*). Пусть X – δ-гиперболическое пространство, а одна из сторон треугольника $\triangle(abc)$ не больше δ. Докажите, что $\triangle(abc)$ – 2δ-вырожденный.

Задача 9.8 (!). Докажите, что пространство Лобачевского δ-гиперболично, для какого-то $\delta > 0$.

9.2. Гиперболические группы

Определение 9.8. Пусть G – группа. Множество $S \subset G$ называется **набором образующих**, если все элементы G выражаются через произведения элементов x_i, x_j^{-1}, для каких-то $x_i, x_j \in S$. Каждое такое произведение называется **словом** от x_i, x_j^{-1}. В дальнейшем, мы будем предполагать по умолчанию, что любой набор образующих S содержит x^{-1} вместе с каждым $x \in S$.

Определение 9.9. Пусть G – группа, а $S \subset G$ – набор образующих. **Граф Кэли** G есть метрический граф, полученный следующим образом. Вершины графа Кэли суть элементы G, а ребра соединяют две вершины g, g', если $g' = gs$, где $s \in S$. Длины всех ребер графа Кэли равны 1.

Определение 9.10. Группа G называется **свободной**, если это фундаментальная группа букета окружностей. **Образующие** свободной группы заданы путями обхода вокруг этих окружностей.

Определение 9.11. Группа с заданной системой образующих называется **гиперболичной по Громову**, если ее граф Кэли δ-гиперболичен, для какого-то δ.

Задача 9.9. Докажите, что свободная группа гиперболична.

Определение 9.12. **Свободное произведение** $(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}) * ... * (\mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z})$ есть фактор свободной группы от k образующих $x_1, ..., x_k$ по минимальной нормальной подгруппе, содержащей $x_1^{n_1}, x_2^{n_2}, ..., x_k^{n_k}$.

Задача 9.10. Докажите, что $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ гиперболична.

Задача 9.11 (*). Докажите, что $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * ... * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ гиперболична.

Задача 9.12. Докажите, что $\mathbb{Z}^n$ с обычным набором образующих негиперболична.

Задача 9.13 (*). Пусть M – компактное метрическое пространство, а $\pi_1(M)$ свободна. Докажите, что универсальное накрытие M гиперболично.

Задача 9.14 (*). Пусть X – компактное метрическое пространство, универсальное накрытие которого есть пространство Лобачевского. Докажите, что группа $\pi_1(X)$ гиперболична по Громову.

9.3. Громовское произведение

Определение 9.13. Пусть X – метрическое пространство с отмеченной точкой p. Для обозначения расстояния $d(a, b)$ будет в дальнейшем использоваться $|ab|$. **Громовское произведение** $(a, b)_p$ есть $1/2(|ap| + |bp| - |ab|)$. Это число, которое измеряет отклонение неравенства треугольника от равенства.

Задача 9.15. Пусть $[a, b]$ – кратчайшая. Докажите, что $(a, b)_p \leqslant d(p, [ab])$.

Задача 9.16. Пусть $(a, b)_p = 0$. Следует ли из этого $p \in [ab]$?

Задача 9.17. Пусть треугольник $\triangle(abp)$ δ-тонкий, а c – точка на стороне $[ab]$. В силу тонкости, существует точка c' на другой стороне $\triangle(abp)$, которая отстоит от c не больше чем на δ. Для определенности, предположим, что c' лежит на $[pa]$. Докажите, что $(c, a)_p < 2\delta + |pc|$.

Указание. Убедитесь, что $(c, a)_p - (c', a)_p| < 2\delta$.

Задача 9.18 (!). Пусть треугольник $\triangle(abp)$ δ-тонкий. Докажите, что

$$d(p, [ab]) \leqslant (a, b)_p \leqslant d(p, [ab]) + 2\delta.$$

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей, применив ее к c, которая является ближайшей точкой к p на кратчайшей $[ab]$.

Задача 9.19. Пусть X 0-гиперболично. Докажите, что $(a, b)_p = d(p, [ab])$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 9.4.

Определение 9.14. Пусть (X, p) – множество с отмеченной точкой. Легко видеть, что расстояние на X можно определить в терминах громовского произведения $(a, b)_p$, потребовав выполнение недлинного списка аксиом. Говорится, что функция $(\cdot, \cdot)_p : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ **удовлетворяет аксиомам громовского произведения**, если выполнены следующие условия.

симметричность: $(a, b)_p = (b, a)_p$.

невырожденность: $(a, a)_p = (a, b)_p = (b, b)_p \Leftrightarrow a = b$.

неравенство треугольника $(a, b)_p + (b, c)_p \leqslant (a, c)_p + (b, b)_p$.

Задача 9.20.

а. Пусть дана функция, удовлетворяющая аксиомам громовского произведения. Докажите, что $d(a, b) := (a, a)_p + (b, b)_p - 2(a, b)_p$ - метрика на X.

б. Докажите, что в отсутствии второго условия ("невырожденности"), эта формула задает полуметрику.

Задача 9.21 (!). Пусть X – 0-гиперболическое пространство с отмеченной точкой p. Рассмотрим объединение отрезков $[\bar{p}, \bar{x}]$ длины $|px|$, где $x \in X$ пробегает все точки X, и склеим $[\bar{p}, \bar{x}]$ с $[\bar{p}, \bar{y}]$ по отрезку, начинающемуся с $\bar{p}$, длины $d(p, [xy])$.

а. Докажите, что полученный граф является деревом.

б. Докажите, что это дерево изометрично X

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Замечание. Из этой задачи следует, что каждое 0-гиперболическое пространство со строго внутренней метрикой изометрично дереву.

9.4. Неравенство Громова

Следующее неравенство, как будет доказано в скором времени, равносильно δ-гиперболичности.

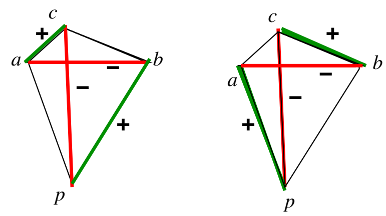
Определение 9.15. Пусть (X, p) – метрическое пространство с отмеченной точкой, а $a, b, c \in X$. **Неравенство Громова** есть неравенство на попарные громовские произведения:

$$(a, b)_p \geqslant \min\left[(a, c)_p, (b, c)_p\right] - \delta.$$

Когда нужно обозначить, о каком конкретно δ идет речь, я буду говорить **δ-неравенство Громова.**

Задача 9.22. Докажите, что неравенство Громова равносильно следующему условию:

$$\max(|bp| + |ac| - |cp| - |ab|, |ap| + |bc| - |cp| - |ab|) > -\delta.$$



Задача 9.23. Пусть в метрическом пространстве X выполнено неравенство Громова для $\delta = 0$. Докажите, что для любых $a, b, c \in X$, в тройке $(a, b)_p, (a, c)_p, (b, c)_p$ какие-то два числа равны, а третье $\leqslant$ первых двух.

Задача 9.24. Пусть в (X, p) выполнено δ-неравенство Громова.

а. Докажите, что для любых $t, x, y, z \in X$ выполнено

$$(t, y)_p + (z, x)_p - \min\left[(t, z)_p + (x, y)_p, 2(y, z)_p\right] \geqslant -2\delta$$

и

$$(t, y)_p + (z, x)_p - \min\left[(t, z)_p + (x, y)_p, 2(x, t)_p\right] \geqslant -2\delta.$$

б. Докажите, что

$$(t, y)_p + (z, x)_p - \min\left[(t, z)_p + (x, y)_p, (y, z)_p + (x, t)_p\right] \geqslant -2\delta.$$

Указание. Попробуйте вывести (б) из (а).

Задача 9.25. Докажите, что

$$(t, y)_p + (z, x)_p - \min\left[(t, z)_p + (x, y)_p, (y, z)_p + (x, t)_p\right] = (t, y)_x - \min\left[(t, z)_x, (y, z)_x\right].$$

Указание. Воспользуйтесь задачей 9.22.

Задача 9.26 (!). Предположим, что в (X, p) выполнено δ-неравенство Громова. Докажите, что для любого выбора отмеченной точки p', в (X, p') выполнено 2δ-неравенство Громова.

Указание. Воспользуйтесь предыдущими двумя задачами.

Задача 9.27. Выведите из неравенства Громова для $\delta = 0$ единственность кратчайших.

Указание. Возьмите две кратчайшие, соединяюще a и p, пусть b, c – их середины; примените неравенство Громова для a, b, c, p и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.28. Пусть в метрическом пространстве X со строго внутренней метрикой выполнено неравенство Громова для $\delta = 0$, $a.b \in X$, а c – точка на кратчайшей $[a, b]$.

а. Докажите, что $(a, c)_p = 0$ либо $(b, c)_p = 0$.

б. Докажите, что c лежит на $[ab]$ либо на $[ac]$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 9.23.

Задача 9.29. Пусть в метрическом пространстве X со строго внутренней метрикой выполнено неравенство Громова для $\delta = 0$. Докажите, что $d(p, [a,b]) = (a,b)_p$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.30 (!). Пусть (X, p) – пространство со строго внутренней метрикой, в котором выполнено неравенство Громова для $\delta = 0$. Докажите, что это дерево.

Указание. Постройте отображение в дерево, как в задаче 9.21, и примените предыдущую задачу и задачу 9.20, чтобы убедиться, что это изометрия.

9.5. Аппроксимационное дерево

Замечание. В этом разделе не все метрические пространства предполагаются наделенными внутренней метрикой.

Задача 9.31 (!). Пусть (X, p) – метрическое пространство с отмеченной точкой. Для набора точек

$$S = \{x = x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1} = y\} \subset X,$$

обозначим за $L_S(x,y) := \min_i (x_i, x_{i+1})_p$. Определим функцию $(x,y)'_p := \mathsf{sup}_S L_S(x,y)$, где супремум берется по всем множествам $x_1, ..., x_n \in X$. Пусть $d'(x,y) = d(x,p) + d(y,p) - 2(x,y)'_p$.

а. Докажите, что $d(x,y) \geqslant d'(x,y) \geqslant 0$.

б. Докажите, что $(x,y)'_p$ удовлетворяет 0-неравенству Громова:

$$(a,b)'_p \geqslant \min\left[(a,c)'_p, (b,c)'_p\right].$$

в. Докажите, что для любых a, b, c выполнено

$$(a,b)'_p + (b,c)'_p \leqslant (a,c)'_p + (b,b)'_p \tag{9.1}$$

г. Докажите, что d' – полуметрика.

Указание. Для доказательства (9.1), выведите из 0-неравенства Громова неравенства $(a,b)'_p \leqslant (b,b)'_p$, $(c,b)'_p \leqslant (b,b)'_p$, и убедитесь, что либо $(a,b)'_p + (b,c)'_p \leqslant (a,c)'_p + (b,c)'_p$, либо $(a,b)'_p + (b,c)'_p \leqslant (a,c)'_p + (a,b)'_p$. Для доказательство того, что d' полуметрика, воспользуйтесь (9.1) и задачей 9.22.

Задача 9.32. Обозначим за X_{tr} метрическое пространство, полученное из построенной выше полуметрики (X, d') склеиванием точек $d'(x,y) = 0$. Докажите, что X_{tr} это дерево, а тавтологическое отображение $(X, d) \xrightarrow{\nu} X_{tr}$ 1-липшицево и удовлетворяет $|px| = d'(\nu(p), \nu(x))$.

Определение 9.16. Пространство (X_{tr}, d') называется **аппроксимационным деревом** для X.

Задача 9.33. Предположим, что в метрическом пространстве X выполнено следующее "неравенство мультигромова":

$$(x,y)_p \geqslant \min_i((x_i, x_{i+1})_p - \delta' \tag{9.2}$$

Докажите, что тавтологическое отображение $(X, d) \xrightarrow{\nu} X_{tr}$ имеет кодиаметр $\leqslant \frac{1}{2}\delta$.

Задача 9.34 (!). Пусть (X, p) – конечное метрическое пространство, в котором $2^k + 2$ точки, и выполнено δ-неравенство Громова. Докажите, что в X выполнено неравенство (9.2) для $\delta' = k\delta$.

9.6. Неравенство Громова и тонкие треугольники

Задача 9.35. Пусть (X, p) – метрическое пространство со строго внутренней метрикой, в котором выполнено δ-неравенство Громова, а a', b' – точки на сторонах $[ca]$, $[cb]$ треугольника $\triangle(cab)$. Рассмотрим пространство Y из 5 точек (c, a, b, a', b'), и пусть $\nu : Y \longrightarrow Y_{tr}$ – отображение на аппроксимационное дерево.

а. Докажите, что $\operatorname{codiam} \nu \leqslant 2\delta$.

б. Пусть Y_{tr}^0 – минимальное связное под-дерево Y, содержащее $\nu(a), \nu(b), \nu(c)$. Докажите, что Y_{tr}^0 изометрично дереву с четырьмя вершинами (одной центральной и три по бокам), длины сторон которого отличаются от длин сторон модельного дерева $\triangle(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ (Определение 9.5) не больше чем на 2δ.

в. Пусть $\mu : \triangle(abc) \longrightarrow \triangle(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ – отображение в модельный треугольник. (Определение 9.5). Докажите, что
$$|d(\mu(a'), \mu(b')) - d(\nu(a'), \nu(a')| < 2\delta,$$
и
$$|d(a', b') - d(\nu(a'), \nu(a')| < 2\delta.$$

г. Выведите из этого, что $\operatorname{codiam} \mu \leqslant 4\delta$

Задача 9.36 (!). Пусть X – метрическое пространство со строго внутренней метрикой, в котором выполнено δ-неравенство Громова. Докажите, что X 4δ-гиперболично.

Задача 9.37. Пусть $\triangle(abc)$ – δ-тонкий треугольник. Докажите, что $(a, b)_p - (a, c)_p \geqslant d(p, [a, b]) - d(p, [a, c]) - 2\delta$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 9.18.

Задача 9.38. Пусть $\triangle(abc)$ – δ-тонкий треугольник, а p' – точка на стороне $[a, b]$, ближайшая к p. Предположим для определенности, что она лежит в δ-окрестности $[ac]$.

а. Докажите, что $d(p, [a, b]) - d(p, [a, c]) \geqslant -\delta$.

б. Докажите, что $(a, b)_p - (b, c)_p \leqslant -3\delta$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 9.39 (!). Пусть $\triangle(abc)$ – δ-тонкий треугольник. Докажите, что
$$(a, b)_p \geqslant \min((a, c)_p, (b, c)_p) - 3\delta.$$

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Замечание. Определим **пространство, гиперболичное по Громову** как метрическое пространство (X, p) с отмеченной точкой, в котором выполнено δ-неравенство Громова для какого-то δ. В силу доказанного выше, это определение равносильно определению через тонкие треугольники ("эквивалентность" следует понимать в смысле Замечания 9.2).

9.7. Гиперболическая граница

Определение 9.17. Пусть X – гиперболическое пространство. Скажем, что **последовательность $\{x_i\}$ сходится на бесконечности**, если

$$\lim_{i,j\to\infty}(x_i,x_j)_p=\infty.$$

Задача 9.40 (*). Пусть $\{x_i\},\{y_i\}$ – последовательности в гиперболическом пространстве. Напишем $\{x_i\}\sim\{y_i\}$, если последовательность $x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3,...$ сходится. Докажите, что это отношение эквивалентности.

Определение 9.18. Множество ∂X классов эквивалентности последовательностей, сходящейся на бесконечности, называется **гиперболической границей**.

Задача 9.41 (*). Рассмотрим слабейшую топологию в $X\cup\partial X$, индуцирующую топологию на X, в которой сходящиеся на бесконечности последовательности сходятся к соответствующей точке ∂X. Докажите, что эта топология хаусдорфова, а X плотно в ∂X.

Задача 9.42 (*). Пусть d – максимальная метрика на ∂X, удовлетворяющая условию $d(\{x_i\},\{y_i\})\leqslant k^{-1}$ для $\lim_i(x_i,y_i)_p\geqslant 2^k$. Докажите, что d задает метрику на ∂X, согласованную с топологией, заданной выше.

Задача 9.43 (**). Докажите, что пространство $(\partial X,d)$ полно.

Задача 9.44 (**). Пусть X – полное риманово многообразие, которое гиперболично по Громову. Докажите, что ∂X компактно. Докажите, что ∂X непусто, если X некомпактно.