

Гиперболические группы по Громову: теорема Картана-Адамара

Миша Вербицкий

18 октября, 2012

НМУ

Кратчайшие в метрическом пространстве (повторение)

Определение: Непрерывное отображение $\gamma : [0, \alpha] \rightarrow M$ называется **кратчайшей**, если его длина равна $d(\gamma(0), \gamma(\alpha))$.

Любой отрезок кратчайшей - снова кратчайшая.

Определение: Если $\varphi : [0, \alpha] \rightarrow [0, \alpha]$ – гомеоморфизм, а γ – путь из x в y , композиция $\varphi \circ \gamma$ – тоже путь из x в y . Такой путь называется **репараметризацией** γ .

Параметризация γ – выбор пути в классе путей, эквивалентных с точностью до репараметризации.

Определение: Пусть $\gamma : [0, \alpha] \rightarrow M$ – кратчайшая, соединяющая x и y , причем

$$d(\gamma(x), \gamma(y)) = |x - y|.$$

Такая кратчайшая называется **кратчайшей геодезической**, а соответствующая параметризация – **геодезической параметризацией**.

Геодезические кратчайшие (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Геодезическая кратчайшая – то же самое, что изометрическое вложение из отрезка в M .

ТЕОРЕМА: Пусть M - локально компактное, полное пространство с внутренней метрикой, а $x_0, x_1 \in M$. **Тогда существует кратчайшая геодезическая, соединяющая x_0 и x_1 .** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: В дальнейшем, **все метрические пространства предполагаются наделенными внутренней метрикой, а любые две точки соединяются кратчайшими с геодезической параметризацией.**

Пространства Александрова (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть a, b, c – точки в метрическом пространстве (M, d) . **Треугольник сравнения** $\Delta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ есть треугольник в \mathbb{R}^2 , с вершинами $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, и сторонами $|\bar{a}, \bar{b}| = d(a, b)$, $|\bar{a}, \bar{c}| = d(a, c)$, и $|\bar{b}, \bar{c}| = d(b, c)$ (такой треугольник, очевидно, существует, и определен единственно с точностью до конгруэнтности).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть a, b, c – точки на пространстве (M, d) со строго внутренней метрикой, $r = d(a, b)$, а $\gamma : [0, r] \rightarrow M$ – кратчайшая с геодезической параметризацией, соединяющая точки (a, b) . Рассмотрим функцию $d_c : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, переводящую t в $d(c, \gamma(t))$. Пусть $\Delta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \subset \mathbb{R}^2$ – треугольник сравнения, а $d_{\bar{c}} : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ – функция, переводящая t в $d(\bar{c}, \bar{\gamma}(t))$, где $\bar{\gamma} : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}^2$ обозначает сторону треугольника сравнения с нормальной параметризацией. Функция $d_{\bar{c}}$ называется **функцией сравнения**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пространство M называется **САТ(0)-пространством**, или **пространством с неположительной кривизной в целом** если для любых a, b, c , функция сравнения удовлетворяет неравенству $d_c \leq d_{\bar{c}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пространство M называется **пространством Александрова неположительной кривизны**, если у каждой точки есть окрестность с неположительной кривизной в целом.

Углы (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть a, b, c – точки в метрическом пространстве (M, d) . **Здесь и в дальнейшем \mathbb{R}^2 предполагается метрическим пространством, с обычной (евклидовой) метрикой.** **Треугольник сравнения** $\Delta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ есть треугольник в \mathbb{R}^2 , с вершинами $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, и сторонами $|\bar{a}, \bar{b}| = d(a, b)$, $|\bar{a}, \bar{c}| = d(a, c)$, и $|\bar{b}, \bar{c}| = d(b, c)$ (такой треугольник, очевидно, существует, и определен единственно с точностью до конгруэнтности). Угол $\sphericalangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ в треугольнике $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ обозначается $\theta(a, b, c)$; он называется **углом сравнения**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\gamma_1 : [0, a] \rightarrow M$, $\gamma_2 : [0, b] \rightarrow M$ два пути в метрическом пространстве M , $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. **Угол** между путями γ_1, γ_2 в p есть число

$$\sphericalangle(\gamma_1, p, \gamma_2) := \lim_{t, s \rightarrow 0} \theta(\gamma_1(t), p, \gamma_2(s)),$$

если такой предел существует (в противном случае, говорится, что **угол между γ_1 и γ_2 не существует**).

Условие монотонности углов (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : [0, a] \rightarrow M$ – кратчайшие в M , $\gamma_i(0) = p$. Говорится, что **в M выполнено условие монотонности углов для неположительной кривизны**, если угол $\theta(\gamma_1(s), p, \gamma_2(t))$ монотонно возрастает как функция от s, t .

УТВЕРЖДЕНИЕ: Условие монотонности углов для неположительной кривизны **равносильно неположительности кривизны в целом**.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть M – пространство Александрова. **Тогда углы между геодезическими кратчайшими в M всегда определены**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Угол $\theta(\gamma_1(t), p, \gamma_2(s))$ – монотонная функция s, t .

■

Выпуклые функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Подмножество $U \subset M$ метрического пространства называется **выпуклым**, если для любых точек $x, y \in U$, любая кратчайшая, соединяющая x и y , содержится в U . **Граница** U есть множество $\bar{U} \cap \overline{(M \setminus U)}$, полученное как пересечение замыкания U и его дополнения. Выпуклое подмножество **строго выпукло**, если его граница не содержит нетривиальных кратчайших.

ПРИМЕР: Функция $\varphi : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла тогда и только тогда, когда $\{(x, y) \mid y \geq \varphi(x)\}$ – выпуклое подмножество в \mathbb{R}^2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция на метрическом пространстве называется **выпуклой**, если ее ограничение на любой отрезок кратчайшей выпукло, и **строго выпуклой**, если ее ограничение на любой отрезок кратчайшей $I = [0, a]$ не линейно ни на каком открытом подмножестве $I_1 \subset I$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для любой (строго) выпуклой функции $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi^{-1}(] - \infty, c])$ – выпуклое (строго выпуклое) множество.

■

Выпуклые функции в CAT(0)-пространствах

УТВЕРЖДЕНИЕ: Определим функцию $d_z : M \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ на метрическом пространстве формулой $d_z(x) := d(z, x)$. Пусть M – CAT(0)-пространство. Тогда d_z строго выпукла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $\gamma : [0, t] \rightarrow M$ – кратчайшая, соединяющая a и b , а $\Delta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{z})$ – треугольник сравнения. Тогда $d_z \leq d_{\bar{z}}$, но последняя функция выпукла, что дает

$$d_z(\lambda t) \leq d_{\bar{z}}(\lambda t) < \lambda d_{\bar{z}}(0) + (1 - \lambda)d_{\bar{z}}(t) = \lambda d_z(0) + (1 - \lambda)d_z(t).$$

■

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть d_x строго выпукла для любого $x \in M$. Тогда z соединяется с любой точкой M не более чем одной кратчайшей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть существуют две кратчайшие, соединяющие x и z , а a, b – середины этих кратчайших. В силу выпуклости, для любой внутренней точки c на кратчайшей, соединяющей a и b , имеем

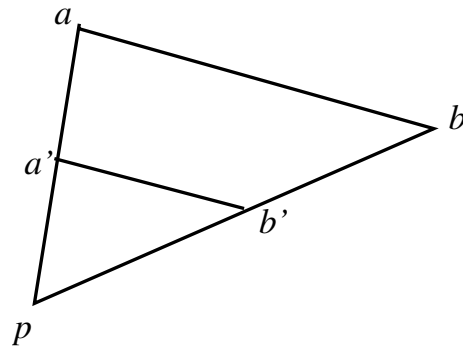
$$d(c, z) < \lambda d(a, z) + (1 - \lambda)d(b, z) = d(a, z) = \frac{1}{2}d(x, z)$$

и $d(c, x) < d(a, x) = \frac{1}{2}d(x, z)$, но это противоречит неравенству треугольника: $d(x, c) + d(z, c) < \frac{1}{2}d(x, z) + \frac{1}{2}d(x, z) = d(x, z)$. ■

Расстояние до геодезической в CAT(0)-пространстве

ЛЕММА: (лемма о выпуклости) Пусть $\gamma_i : [0, t_i] \rightarrow M$ – кратчайшие геодезические в CAT(0)-пространстве, а $\kappa : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ переводит $u \in [0, 1]$ в $d(\gamma_1(t_1 u), \gamma_2(t_2 u))$. **Тогда κ выпукла.**

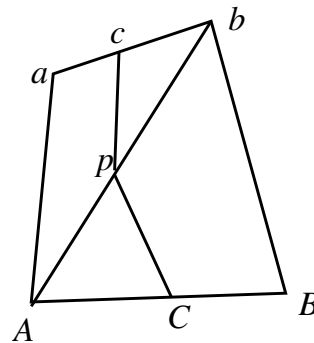
Доказательство. Шаг 1: Пусть $\gamma_i : [0, t_i] \rightarrow M$ – кратчайшие геодезические в CAT(0)-пространстве, $\gamma_i(0) = p$, $\gamma_1(t_1) = a$, $\gamma_2(t_2) = b$. Выберем $0 < \lambda < 1$, и пусть $a' = \gamma_1(\lambda t_1)$, $b' = \gamma_2(\lambda t_2)$. **Тогда $d(a', b') \leq \lambda d(a, b)$,**



в силу монотонности углов.

Расстояние до геодезической в CAT(0)-пространстве (продолжение)

Шаг 2: Пусть a, b, A, B – точки в CAT(0)-пространстве, c, C – середины кратчайших, соединяющих a, b и A, B , а p – середина кратчайшей, соединяющей A и b .



Применив шаг 1, получим, что $d(c, p) + d(p, C) \leq \frac{1}{2}(d(a, A) + d(b, B))$, а из неравенства треугольника следует $d(c, C) \leq d(c, p) + d(p, C)$. **Это дает неравенство $\kappa(1/2) < \frac{1}{2}(\kappa(0) + \kappa(1))$.**

Шаг 3: Получаем, что для любого отрезка $[a, b] \subset [0, 1]$,

$$\kappa\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\kappa(a) + \kappa(b)).$$

Шаг 4: Для любой непрерывной функции $\kappa : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, **неравенство $\kappa\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(\kappa(a) + \kappa(b))$ влечет выпуклость** (проверьте). ■

Равномерная сходимость геодезических

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Определим **расстояние** между функциями $\gamma_i : [0, t_i] \rightarrow M$ по формуле

$$d_\Gamma(\gamma_1, \gamma_2) := \sup_x d(\gamma_1(t_2x/t_1), \gamma_2(x)).$$

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что это метрика.

ТЕОРЕМА: Пусть M – CAT(0)-пространство, а $\gamma_i : [0, t_i] \rightarrow M$ – последовательность кратчайших геодезических, такая, что концы $a_i := \gamma_i(0)$, $b_i := \gamma_i(t_i)$ сходятся к точкам a, b . Пусть $\gamma : [0, t] \rightarrow M$ – кратчайшая геодезическая, соединяющая a и b . Тогда **последовательность γ_i равномерно сходится к γ .**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В силу леммы о выпуклости, $d_\Gamma(\gamma_i, \gamma) = \max(d(a_i, a) + d(b_i, b))$, то есть **сходимость γ_i равносильно сходимости их концов.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: В доказательстве использовалось следующее полезное утверждение. Пусть γ, γ' – кратчайшие геодезические в CAT(0)-пространстве, а a, b и a', b' – их концы. Тогда $d_\Gamma(\gamma, \gamma') = \max(d(a, a') + d(b, b'))$

СЛЕДСТВИЕ: Обозначим за $\Gamma_p(M)$ пространство кратчайших геодезических с началом в p и метрикой d_Γ , и пусть $\pi : \Gamma_p(M) \rightarrow M$ отображает геодезическую в ее второй конец. **Тогда π – изометрия.** ■

Гомотопии и пространство кратчайших геодезических

Зафиксируем точку p в CAT(0)-пространстве. Пусть $0 \leq \lambda \leq 1$, а $P_\lambda : M \rightarrow M$ отображает геодезическую $\gamma : [0, t] \rightarrow M$ в $\gamma|_{[0, \lambda t]}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: На $M \cong \Gamma_p(M)$ это отображение определяется следующим образом. Для какой-то точки $x \in M$, рассмотрим кратчайшую $\gamma_x : [0, d(p, x)] \rightarrow M$, соединяющую p с x . **Тогда $P_\lambda : M \rightarrow M$ отображает x в $\gamma_x(\lambda d(p, x))$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: По построению, P_λ задает непрерывное отображение из $M \times [0, 1]$ в M .

СЛЕДСТВИЕ: P_λ задает гомотопию между тождественным отображением из M в себя и отображением, переводящим M в $\{p\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы доказали, что **все CAT(0)-пространства стягиваемы.**

Радиус выпуклости

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – пространство Александрова неположительной кривизны. **Нормальный шар** в M есть шар $B_\varepsilon(x)$, который является CAT(0)-пространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – пространство Александрова неположительной кривизны. **Радиус выпуклости** в точке $x \in M$ есть супремум всех ε таких, что шар $B_\varepsilon(x)$ – нормальный. Обозначим радиус выпуклости за $\rho(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Функция $x \rightarrow \rho(x)$ 1-липшицева**, в силу стандартного аргумента.

ЗАМЕЧАНИЕ: Общая форма "стандартного аргумента". Пусть в множестве всех шаров есть подмножество \mathfrak{S} такое, что для каждого шара $B_r(x) \in \mathfrak{S}$, все шары, содержащиеся в $B_r(x)$, тоже принадлежат \mathfrak{S} . **Тогда функция $\rho_{\mathfrak{S}}(x) := \sup_r \{r \mid B_r(x) \in \mathfrak{S}\}$ 1-липшицева.**

УПРАЖНЕНИЕ: **Докажите это.**

Кратчайшие и геодезические

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Геодезическая (не обязательно кратчайшая) есть путь $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ такой, что у каждой точки $x \in [0, t]$ есть связная окрестность U_x такая, что $\gamma|_{U_x}$ – кратчайшая геодезическая. Обозначим за $\Gamma(M)$ пространство всех геодезических, с метрикой d_γ , и за $\Gamma_p(M)$ пространством геодезических с началом в p .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Радиус выпуклости для множества $Z \subset M$ есть $\inf_{z \in Z} \rho(z)$, где ρ есть радиус выпуклости в точке z .

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\gamma : [0, t] \rightarrow M$, $\gamma' : [0, t'] \rightarrow M$ – геодезические в пространстве Александрова неположительной кривизны, радиус выпуклости γ равен ε , а $d_\Gamma(\gamma, \gamma') < \varepsilon$. Определим $\kappa : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ по формуле $\kappa(u) := d(\gamma(ut), \gamma'(ut'))$. Тогда κ – выпуклая функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выпуклость – локальное свойство, а локально γ и γ' разбиваются в объединение сегментов кратчайших, которые лежат в нормальных шарах. ■

Кратчайшие и геодезические (продолжение)

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $\gamma : [0, t] \rightarrow M$, $\gamma' : [0, t'] \rightarrow M$ – геодезические в пространстве Александрова неположительной кривизны, радиус выпуклости γ равен ε , а $d_\Gamma(\gamma, \gamma') < \varepsilon$. **Тогда расстояние между геодезическими есть максимум расстояния между концами.**

СЛЕДСТВИЕ: Рассмотрим отображение $\Gamma_p(M) \xrightarrow{\pi} M$, переводящее геодезическую в ее второй конец. Пусть ε – радиус выпуклости для γ . Тогда для каждого ε -шара $B_\varepsilon(\gamma) \subset \Gamma_p(M)$, ограничение $\pi|_{B_\varepsilon(\gamma)}$ задает изометрию $B_\varepsilon(\gamma)$ и шара $B_\varepsilon(\pi(\gamma))$.

Теорема Картана-Адамара

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Полное, односвязное пространство Александрова неположительной кривизны называется **пространством Адамара**

ТЕОРЕМА: (Картан-Адамар) Пусть M – пространство Адамара. Рассмотрим отображение $\Gamma_p(M) \xrightarrow{\pi} M$, переводящее геодезическую в ее второй конец. **Тогда π – гомеоморфизм.**

СЛЕДСТВИЕ: Геодезическая, соединяющая две точки пространства Адамара, единственна. ■

СЛЕДСТВИЕ: Каждое пространство Адамара стягиваемо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Аргумент, который доказывает стягиваемость CAT(0)-пространств, работает и в этой ситуации. ■

Нетривиальное следствие из теоремы Картана-Адамара:

ТЕОРЕМА: Любое пространство Адамара является CAT(0)-пространством.

Доказательство см. в листочках.

Доказательство теоремы Картана-Адамара

ТЕОРЕМА: (Картан-Адамар) Пусть M – полное пространство Александра неположительной кривизны. Рассмотрим отображение $\Gamma_p(M) \xrightarrow{\pi} M$, переводящее геодезическую в ее второй конец. **Тогда π – накрытие.**

Доказательство. Шаг 1: Пространство $\Gamma(M)$ – полное. Действительно, предел липшицев функций липшицев, предел изометрий – изометрия.

Шаг 2: Пусть $X \rightarrow Y$ – локальная изометрия полных метрических пространств с внутренней метрикой, причем у каждой точки есть окрестность, в которой геодезические единственны. Тогда имеет место **принцип накрывающей гомотопии:** для каждого пути γ в Y , поднятие γ в X существует, и единственным образом определяется его концом.

Шаг 3: Пусть $X \rightarrow Y$ – локальный гомеоморфизм, удовлетворяющий принципу накрывающей гомотопии, а у каждой точки Y есть стягиваемая окрестность. **Тогда $X \rightarrow Y$ – накрытие.**

Шаг 4: В силу доказанного выше, $\Gamma_p(M) \xrightarrow{\pi} M$ – локальная изометрия, а у каждой точки M есть стягиваемая окрестность – нормальный шар. **Значит, π – накрытие. ■**