Кольца целых.

Задача 1°. Найдите кольцо целых в расширении, полученном присоединением корня следующего многочлена. Какие дискриминанты имеют соответствующие поля?
a) x^3-2; b) x^3-10; c) $x^3-12x+2$; d) x^4+2x^2+3x+1; e) x^5-x-1.

Задача 2. $a°$) Найдите базис кольца целых и дискриминант $\mathbb{Q}(i,\sqrt{5})$ над $\mathbb{Q}(i)$ и над $\mathbb{Q}$.

$b°$) Найдите $\mathbb{Z}[i]$-базис кольца целых и дискриминант над $\mathbb{Q}$ расширения $\mathbb{Q}(i,\sqrt{d})$ для целого $d \neq \pm 1$, свободного от квадратов.

c) Покажите, что дискриминант расширения Галуа $\mathbb{Q}$ степени 4 с группой Галуа $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ является полным квадратом.

Подсказка: когда группа Галуа поля разложения многочлена вложена в A_n?

Задача 3. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — конечное расширение. Определите кольцо целых расширения $K(\sqrt{\alpha})$, где $\alpha \in \mathcal{O}_K$ свободно от квадратов.

Задача 4. Пусть k — поле, $K = k(t)$ — поле рациональных функций от t, $L = K(\sqrt{f(t)})$, где $f(t) \in k[t]$ — приведённый неприводимый многочлен. Найдите целое замыкание $k[t]$ в L.

Задача 5. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — конечное расширение, σ_i — его различные вложения в $\mathbb{C}$, $\alpha \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}$.

a) Покажите, что, если α не корень из единицы, то $|\sigma_i(\alpha)| > 1$ для некоторого i.

b) Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Покажите, что, если $\alpha \neq 2\cos(r\pi)$, $r \in \mathbb{Q}$, то $|\sigma_i(\alpha)| > 2$ для некоторого i.

Задача 6. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — конечное расширение, $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r_1}$ — различные вещественные вложения K в $\mathbb{C}$, а $\sigma_{r_1+1}, \bar{\sigma}_{r_1+1}, \ldots, \sigma_{r_1+r_2}, \bar{\sigma}_{r_1+r_2}$ — различные пары комплексно сопряжённых комплексных вложений K в $\mathbb{C}$. Определим отображение $\phi\colon K \to \mathbb{R}^n$ формулой:
$x \mapsto (\sigma_1(x), \ldots, \sigma_{r_1}(x), \sqrt{2}\cdot\operatorname{Re}\sigma_{r_1+1}(x), \sqrt{2}\cdot\operatorname{Im}\sigma_{r_1+1}(x), \ldots, \sqrt{2}\cdot\operatorname{Re}\sigma_{r_1+r_2}(x), \sqrt{2}\cdot\operatorname{Im}\sigma_{r_1+r_2}(x))$.

$a°$) Покажите, что для любого N найдется лишь конечное число таких элементов $\alpha \in \mathcal{O}_K$, что $|\sigma_i(\alpha)| \leq N$ для всех i.

$b°$) Убедитесь, что $\phi(\mathcal{O}_K)$ — решётка полного ранга в $\mathbb{R}^n$.

c) Докажите, что объём её фундаментального параллелепипеда равен $\sqrt{|\mathrm{Disc}_{K/\mathbb{Q}}|}$.

d) Пусть $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$ — идеал. Убедитесь, что $\phi(\mathfrak{a})$ — решётка и найдите объём её фундаментального параллелепипеда.

e) Найдите длину минимального вектора решётки $\phi(\mathcal{O}_K)$.

Задача 7 (Теорема Брилля). Докажите, что для конечного расширения $K/\mathbb{Q}$ знак дискриминанта $\mathrm{Disc}_{K/\mathbb{Q}}$ равен $(-1)^{r_2}$, где r_2 — число пар комплексно сопряжённых комплексных вложений K в $\mathbb{C}$ (т. е. таких, что их образ не лежит в $\mathbb{R}$).

Подсказка: если $\{\alpha_j\}_{j=1\ldots n}$ — базис $K/\mathbb{Q}$, а $\{\sigma_i\}_{i=1\ldots n}$ — различные вложения K в $\mathbb{C}$, то $\mathrm{Disc}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \det(\sigma_i(\alpha_j))^2$.

Задача 8 (Теорема Штикельбергера). Покажите, что дискриминант конечного расширения $K/\mathbb{Q}$ сравним с 1 или 0 по модулю 4.

Подсказка: разбейте $\det(\sigma_i(\alpha_j))$ *в сумму по чётным и нечётным перестановками.*

Задача 9. Пусть $K = \mathbb{Q}(\gamma)$, где $\gamma^3 - \gamma^2 - 2\gamma - 8 = 0$.

a) Убедитесь, что $1, \gamma, \gamma' = \frac{1+\gamma^2}{2}$ образуют базис $\mathcal{O}_K$.

b) Покажите, что для любого $\alpha \in \mathcal{O}_K \setminus \mathbb{Z}$, $2 \mid [\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\alpha]]$. В частности, $\mathcal{O}_K \neq \mathbb{Z}[\alpha]$ для любого $\alpha \in K$.

Подсказка: вычислите определитель матрицы перехода от $1, \alpha, \alpha^2$ к $1, \gamma, \gamma'$.

Задача 10. Докажите, что кубическое поле K (т. е. $[K : \mathbb{Q}] = 3$) является чисто кубическим (т. е. $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{m})$ тогда и только тогда, когда $D_K = -3d^2$, $d \in \mathbb{N}$.

Задача 11. Пусть a, b, c, d — свободные от квадратов взаимно простые натуральные числа, большие единицы, одно из которых делится на 3.

a) Покажите, что поля $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{abc^2d^2})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{acb^2d^2})$ различны, но имеют один и тот же дискриминант $-27a^2b^2c^2d^2$.

b) Докажите, что для любого натурального n можно построить n различных чисто кубических полей с одним и тем же дискриминантом.