В.И. Богачев

Преобразования и сходимость мер, условные меры и теория Рохлина

(полугодовой спецкурс в НМУ, осень 2013)

1 Вводные замечания о задачах теории меры

Хотя некоторые базовые задачи теории меры восходят к глубокой древности, современная теория меры возникла после работ выдающегося французского математике Анри Лебега в начале XX века, существенно развитых другими математиками разных стран, в числе которых в первую очередь следует назвать И. Радона, К. Каратеодори, Н.Н. Лузина, А.Н. Колмогорова, Н. Винера, Дж. фон Неймана, А.Д. Александрова, Ю.В. Прохорова, В.А. Рохлина.

Первая основная задача теории меры — построение функций множества, называемых мерами, заданных на областях определения, замкнутых относительно конечных и счетных операций (такие области определения называют σ-алгебрами), и обладающих свойством счетной аддитивности, т.е.

$$\mu\Bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Bigr) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{1}$$

для дизъюнктных A_n из области определения μ. Свойство счетной аддитивно удобно вводить и на областях определения, не являющихся σ-алгебрами: тогда предыдущее равенство требуется лишь для тех попарно непересекающихся A_n из области определения, для которых $\cup_n A_n$ также входит в область определения. Из счетной аддитивности вытекает конечная аддитивность: равенство (1) для конечных дизъюнктных объединений.

Почему счетная аддитивность и почему замкнутость области определения относительно счетных операций? Это в каком-то смысле экспериментальный факт: таковы реально встречаемые со времен античности функции множества. Еще древние задались вопросом: для каких множеств и как можно определить длину, площадь, объем, имея эталон (единичный отрезок, квадрат, куб)? Уже тогда использовались счетные операции и счетная аддитивность: они нужны, чтобы найти площадь круга и объем шара, исходя из площадей и объемов вписанных в них элементарных фигур (конечных объединений квадратов или кубов). Много позже, уже в конце XIX века, эта идея была реализована в курсах Пеано и Жордана, построения которых дошли до современных школьных программ (впрочем, неясно, долго ли они еще продержатся под ударами современных варваров из МОН; еще сравнительно недавно концепция Пеано – Жордана входила в школьные выпускные экзамены).

Напомним, что множество E из $[0,1]$ называется измеримым по Жордану, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся два конечных объединения промежутков A_ε и B_ε с $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$ и $\lambda(B_\varepsilon \backslash B_\varepsilon) < \varepsilon$, где λ — длина (предполагается, что она задана на элементарных множествах).

Эта довольно наглядная конструкция имеет несомненные достоинства, но обладает и важным недостатком, критическим в свете сказанного о счетных объединениях: область определения меры Жордана незамкнута относительно счетных объединений, причем уже в простейшем случае (множество рациональных чисел в $[0,1]$ неизмеримо по Жордану, ибо в нет промежутков положительной длины, но при этом всякое конечное объединение промежутков, его содержащих, есть весь отрезок за исключением конечного числа иррациональных точек).

Анри Лебег на рубеже XIX – XX веков открыл способ мероизмерения без этого недостатка. Его конструкция — двухходовка. На первом шаге вводится внешняя мера всякого множества E из $[0,1]$ или даже из всей прямой по формуле

$$\lambda^*(E) = \inf\Bigl\{\sum_{n=1}^\infty \lambda(J_n)\colon\ E \subset \bigcup_{n=1}^\infty J_n,\ J_n \text{ — промежутки}\Bigr\}.$$

Проверяется, что на конечных объединениях промежутков получается исходная длина.

Однако неясно, будет ли полученная функция множества аддитивна на классе всех множеств. Даже хуже, чем «неясно»: этого нам знать не дано. А именно: если принять так называемую аксиому выбора, то аддитивности не будет, но можно эту аксиому запретить и принять иную аксиому, которая даст аддитивность. Впрочем, можно считать, что нам на самом деле аддитивности нет, а та другая аксиома просто некоторые множества не считает за множества (наподобие того, как в некоторых свободных странах есть граждане и неграждане).

Напомним известную из учебного курса конструкцию Витали, которая на основе аксиомы выбора опровергает аддитивность внешней меры Лебега на классе всех множеств. Введем на $\mathbb{R}$ отношение эквивалентности: $x \sim y$ при $x - y \in \mathbb{Q}$. Получаем счетное число классов эквивалентности, в каждом из которых числа отличаются друг от друга на рациональные числа. Аксиома выбора разрешает взять множество V из $[0,1/2]$, содержащее ровно по одному представителю каждого класса эквивалентности (разумеется, таких множеств много). Возможны два варианта: $\lambda^*(V) > 0$ и $\lambda^*(V) = 0$. Первый несовместим с аддитивностью, ибо $\lambda^*(V) = \lambda^*(V+q)$ при всех q, но при различных рациональных q и r мы имеем $(V+p) \cap (V+r) = \varnothing$ по определению V; тогда можно набрать столь много рациональных $p_1, \ldots, p_n \in [0,1/2]$, что $\lambda^*(V+p_1) + \cdots + \lambda^*(V+p_n) = n\lambda^*(V) > 1$, а это невозможно при аддитивности, так как

$(V+p_1)\cup\cdots\cup(V+p_n)\subset[0,1]$ и $\lambda^*(A)\leqslant\lambda^*(B)$ при $A\subset B$. Второй же вариант и вовсе невозможен: если $\lambda^*(V)=0$, то $\lambda^*(V+q)=0$ при всех $q\in\mathbb{Q}$, что, как легко проверить, дает равенство $\lambda^*([0,1])=0$, ибо $[0,1]\subset\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(V+q)$.

Итак, при аксиоме выбора аддитивности внешней меры на классе всех множеств нет. Поэтому необходим второй ход: Лебег ограничивает класс множеств теми, для которых

$$\lambda^*(E)+\lambda^*([0,1]\backslash E)=1,$$

т.е. выполнена аддитивность в минимальном варианте: для множества и его дополнения. Класс таких множеств обозначим через $\mathcal{L}[0,1]$. Совершенно аналогично построение на кубе $[0,1]^n$. Соответствующий класс обозначим через $\mathcal{L}([0,1]^n)$. Этот класс называется классом измеримых по Лебегу множеств в $[0,1]^n$.

Напомним, что класс $\mathcal{A}$ подмножеств пространства X называется σ-алгеброй, если $\varnothing, X\in\mathcal{A}$, $\cap_{n=1}^{\infty}A_n, \cup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$ для всех $A_n\in\mathcal{A}$ и $X\backslash A\in\mathcal{A}$ для всех $A\in\mathcal{A}$. Иначе говоря, $\mathcal{A}$ содержит пустое множество и допускает операции дополнения, счетного пересечения и счетного объединения.

Задача 1.1. *Пусть X — бесконечное множество. Проверьте, что класс множеств в X, которые либо не более чем счетны, либо имеют не более чем счетное дополнение, является σ-алгеброй.*

Лебег установил следующий фундаментальный факт.

Теорема 1.2. *Класс $\mathcal{L}([0,1]^n)$ — σ-алгебра, внешняя мера на нем счетно аддитивна.*

Мерой Лебега λ называют внешнюю меру на $\mathcal{L}([0,1]^n)$. Конечно, единичный куб выбран лишь для наглядности. Аналогичное построение годится для любого куба. Теперь множество E в $\mathbb{R}^n$ назовем измеримым по Лебегу, если измеримо его пересечение со всяким кубом $[-R,R]^n$. Меру Лебега такого множества E (возможно, бесконечную) зададим как

$$\lambda(E)=\lim_{R\to\infty}\lambda(E\cap[-R,R]^n).$$

Итак, мера Лебега — счетно аддитивное продолжение элементарной длины (или объема) на некоторую σ-алгебру (но не всех множеств в предположении аксиомы выбора).

Отметим, что наличие множества Витали еще не закрывает возможность найти какое-либо счетно аддитивное продолжение элементарной длины на σ-алгебру всех множеств, а лишь говорит, что этого нельзя добиться с помощью внешней меры. Заведомо можно продолжить распространение меры, если ее область определения не есть класс всех множеств.

Задача 1.3. *Пусть μ — вероятностная мера на σ-алгебре $\mathcal{A}$ в пространстве X и $E\notin\mathcal{A}$. Доказать, что μ продолжается до вероятностной меры на наименьшей σ-алгебре, содержащей $\mathcal{A}$ и E, причем элементы этой σ-алгебры имеют вид*

$$(E\cap A)\cup((X\backslash E)\cap B,$$

где $A,B\in\mathcal{A}$.

Оказывается, что и при такой более широкой постановке мы упираемся в теоретико-множественные проблемы: в предположении гипотезы континуума нет никакого счетно аддитивного продолжения элементарной длины на класс всех множеств.

Задача 1.4. *С помощью аксиомы выбора доказать, что существуют дизъюнктные множества S_1 и S_2 нулевой меры Лебега, для которых $S_1 \cup S_2 = [0,1]$.*

2 Борелевские множества

Мы обсудили по возможности максимальные продолжения (которых не оказалось). А как с минимальными?

Для каждого класса множеств $\mathcal{F}$ в данном пространстве X есть наименьшая σ-алгебра $\sigma(\mathcal{F})$, содержащая $\mathcal{F}$: пересечение всех σ-алгебр, содержащих $\mathcal{F}$ (здесь есть, что пересекать, скажем, есть σ-алгебра всех множеств). Эта σ-алгебра называется порожденной классом $\mathcal{F}$, хотя термин «порожденная» не следует трактовать в каком-либо конструктивном смысле. Например, недостаточно сделать следующее: взять все счетные объединения и дополнения множеств из $\mathcal{F}$ и продолжить этот процесс по индукции (это не всегда даст σ-алгебру).

Минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые множества в метрическом пространстве X, называется борелевской σ-алгеброй в X и обозначается через $\mathcal{B}(X)$.

Ясно, что $\mathcal{B}(X)$ совпадает и с минимальной σ-алгеброй, содержащей все замкнутые множества.

Задача 2.1. *Доказать, что если X сепарабельно, то $\mathcal{B}(X)$ есть наименьшая σ-алгебра, содержащая все открытые шары рационального радиуса с центрами в точках какого-либо счетного всюду плотного множества.*

Анализ доказательства теоремы Лебега о продолжении меры приводит к выводу, что аналогичный факт справедлив в большей общности.

Пусть $\mu \geqslant 0$ — конечная счетно аддитивная функция множества на алгебре $\mathcal{A}$ в пространстве X,

$$\mu^*(E) = \inf\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\colon\ E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ A_n \in \mathcal{A}\Big\},$$

$$\mathcal{A}_\mu = \Big\{E\colon\ \mu^*(E) + \mu^*(X\backslash E) = \mu(X)\Big\}.$$

Хотя внешняя мера на классе всех множеств не обязана быть аддитивной, она обладает следующим свойством непрерывности снизу, которое при наличии аддитивности равносильно счетной аддитивности.

Задача 2.2. *Пусть множества E_n возрастают к E. Доказать, что*

$$\mu^*(E_n) \to \mu^*(E).$$

Теорема 2.3. *Класс $\mathcal{A}_\mu$ — σ-алгебра, внешняя мера μ^* на нем счетно аддитивна, причем на $\mathcal{A}$ она совпадает с μ.*

Внешнюю меру μ^* на $\mathcal{A}_\mu$ обозначают через μ и называют лебеговским продолжением μ; множества из $\mathcal{A}_\mu$ называют μ-измеримыми.

Задача 2.4. *Доказать, что $(\mathcal{A}_\mu)_\mu = \mathcal{A}_\mu$.*

Заметим, что в этой теореме нужна счетная аддитивность исходной меры на алгебре. Не всякая аддитивная мера счетно аддитивна. Например, на алгебре $\mathcal{A}$ конечных множеств в $\mathbb{N}$ и их дополнений функция $\mu(A) = 0$, если A конечно, $\mu(A) = 1$, если A имеет конечное дополнение, аддитивна, но не счетно аддитивна. С помощью аксиомы выбора можно построить пример аддитивной, но не счетно аддитивной функции на σ-алгебре. В дальнейшем термин «мера» будет означать счетно аддитивную меру.

Откуда берутся счетно аддитивные меры на алгебрах?

Класс $\mathcal{K}$ множеств в пространстве X называется компактным, если из того, что $K_n \in \mathcal{K}$ и $\bigcap_{n=1}^\infty K_n = \varnothing$, следует, что $\bigcap_{n=1}^N K_n = \varnothing$ при некотором N.

Задача 2.5. *Доказать, что всякий набор компактов в топологическом пространстве есть компактный класс.*

Задача 2.6. *Доказать, что аддитивная неотрицательная функция множества μ на алгебре $\mathcal{A}$ счетно аддитивна, если она имеет приближающий компактный класс $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ в следующем смысле:*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K)\colon\ K \subset A,\ K \in \mathcal{K}\} \quad \forall\, A \in \mathcal{A}.$$

Это условие лишь достаточно, но не необходимо; однако довольно непросто привести пример, когда оно не выполнено.

Теорема 2.7. *Пусть μ — борелевская вероятностная мера на полном сепарабельном метрическом пространстве X. Тогда для всякого $B \in \mathcal{B}(X)$ и всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $K_\varepsilon \subset B$, что*

$$\mu(B \backslash K_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Доказательство. Рассмотрим класс $\mathcal{E}$ всех борелевских множеств B с таким свойством: для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся замкнутое множество $F \subset B$ и открытое множество $U \supset B$ с $\mu(U \backslash F) < \varepsilon$. Проверьте, что замкнутые множества лежат в $\mathcal{E}$ и что $\mathcal{E}$ — σ-алгебра. Это дает $\mathcal{E} = \mathcal{B}(X)$. Пока сепарабельность и полнота не нужны.

Теперь достаточно показать, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется компакт K_ε с

$$\mu(X \backslash K_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Если это сделано, то, приблизив $B \in \mathcal{B}(X)$ изнутри замкнутым множеством F с $\mu(B \backslash F) < \varepsilon$, мы получаем компакт $Q_\varepsilon = K_\varepsilon \cap F \subset B$ с $\mu(B \backslash Q_\varepsilon) < 2\varepsilon$. Для построения K_ε для каждого фиксированного n покроем X счетным числом замкнутых шаров радиуса менее 2^{-n} (что возможно из-за сепарабельности) и возьмем конечное объединение S_n этих шаров с $\mu(S_n) > 1 - \varepsilon 2^{-n}$, что возможно из-за счетной аддитивности меры.

Множество $K_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^\infty S_n$ замкнуто и $\mu(K_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon$. Наконец, оно компактно, ибо вполне ограничено (покрывается конечным числом шаров сколь угодно малого радиуса), а пространство полно. $\square$

Надо иметь в виду, что аналогичное утверждение может быть неверно для под-σ-алгебр борелевской σ-алгебры.

Задача 2.8. *Пусть в предыдущей теореме мера μ не имеет точек положительной меры. Доказать, что в качестве приближающих компактов можно брать компакты без внутренних точек.*

Множество называется нигде не плотным, если во всяком открытом шаре есть открытый шар, свободный от его точек. Счетное объединение нигде не плотных множеств называется множеством первой категории.

Задача 2.9. *Докажите теорему Бэра: полное метрическое пространство не является множеством первой категории.*

Задача 2.10. *Пусть метрическое пространство X не является множеством первой категории. Показать, что класс $\mathcal{E}$ всех его подмножеств первой категории и их дополнений есть σ-алгебра, а функция μ, для которой $\mu(E) = 0$ и $\mu(X \backslash E) = 1$ для E первой категории, есть вероятностная мера.*

Вывести из этого, что для $X = [0,1]$ такая мера не имеет продолжения на всю борелевскую σ-алгебру.

Заметить также, что в множестве $\mathcal{I}$ иррациональных чисел в $[0,1]$ (оно входит в $\mathcal{E}$) нет компактов ненулевой μ-меры, ибо компакты в $\mathcal{I}$ не имеют внутренних точек и потому являются множествами первой категории.

Задача 2.11. *Пусть X — такое неизмеримое по Лебегу множество в $[0,1]$, что $\lambda^*(E) = \lambda^*([0,1] \backslash E) = 1$ (доказать, что такое есть). Рассматривая X как самостоятельное метрическое пространство (с обычной метрикой), показать, что его борелевские множества имеют вид*

$$X \cap B, \quad \text{где } B \in \mathcal{B}[0,1].$$

Задать меру μ на $\mathcal{B}(X)$ так: $\mu(X \cap B) = \lambda(B)$, проверив, что $\lambda(B) = \lambda(B_0)$, если $B_0 \in \mathcal{B}[0,1]$ и $X \cap B_0 = X \cap B$. Показать, что для μ неверно заключение предыдущей теоремы.

Стоит отметить, что предыдущие две теоремы дают попутно продолжения длины или объема на борелевскую σ-алгебру отрезка или куба соответственно. Естественно возникает такой вопрос: раз мы хотели продолжить элементарную меру на σ-алгебру, а борелевская является наименьшей возможной, причем из этих теорем вытекает существование продолжения, то нельзя ли было сразу непосредственно проверить, что внешняя мера на борелевских множествах счетно аддитивна? Вроде бы внешняя мера задана явной формулой и борелевские множества тоже довольно коротко определяются. Оказывается, что простым образом проверить счетную аддитивность внешней меры на борелевских множествах не удается и приходится идти обходным путем, доказывая более общий факт. Известные обоснования счетной аддитивности именно на борелевских множествах привлекают трансфинитную индукцию и по длине превосходят доказательства приведенных теорем. Видимо, причина кроется в том, что на самом деле краткость определения борелевских множеств обманчива, их определение весьма неконструктивно, с его помощью невозможно проверять борелевость заданного множества. Это обстоятельство было понято еще сто лет назад; его осмысление привело к разработке школой Николая Николаевича Лузина дескриптивной теории множеств. Важнейшим ее аспектам применительно к нуждам теории меры посвящен следующий параграф.

Задача 2.12. *Докажите, что классическое множество Кантора гомеоморфно счетной степени двухточия* $\{0,1\}$.

Задача 2.13. *Докажите, что класс цилиндров в счетной степени прямой* $\mathbb{R}^\infty$, *имеющих вид* $K\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots$, *где* K *— компакт в* $\mathbb{R}^n$, *является компактным классом (т.е. последовательность множеств такого вида имеет непустое пересечение, если всякая конечная ее часть имеет непустое пересечение).*

Задача 2.14. *Пусть* μ *— борелевская вероятностная мера на бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве* H, *причем точка* 0 *имеет меру нуль относительно* μ. *Докажите, что точная нижняя грань значений меры* μ *на шарах единичного радиуса, содержащих* 0, *равна нулю.*

3 Суслинские множества

Сто лет назад очень не любили неконструктивных определений. Поэтому многим не нравилось приведенное выше определение борелевских множеств. Более конструктивным считалось определение по трансфинитной индукции, незадолго до того появившейся и ставшей на несколько десятилетий обязательным элементом учебных программ по теории функций. О порядковых числах и трансфинитной индукции можно прочитать в книгах [3], [4] и [1]. Можно ли обойтись и без трансфинитной индукции при описании борелевских множеств? Такой вопрос был поставлен Н.Н. Лузиным перед его учениками. Весьма нетривиальный и глубокий ответ на него был дан П.С. Александровым и М.Я. Суслиным при помощи самого Н.Н. Лузина. Здесь мы кратко расскажем, в чем состоит ответ и что из этого проистекло.

Определение 3.1. *Пусть* $\mathcal{E}$ *— некоторый класс множеств в пространстве* X, *содержащий пустое множество. Схемой (или таблицей) Суслина со значениями в* $\mathcal{E}$ *называется семейство множеств* $E_{n_1,\dots,n_k}\in\mathcal{E}$, *заданных для каждого конечного набора натуральных чисел* $n_1,\dots,n_k$.

Схема Суслина называется монотонной, если $E_{n_1,\dots,n_k,n_{k+1}}\subset E_{n_1,\dots,n_k}$.

Результат операции Суслина (или A-операции) к схеме $\{E_{n_1,\dots,n_k}\}$ *есть множество*

$$S=\bigcup_{(n_i)\in\mathbb{N}^\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{n_1,\dots,n_k},$$

где объединение берется по всем бесконечным последовательностям натуральных чисел.

Через $S(\mathcal{E})$ обозначим класс всех множеств, получаемых таким способом при всевозможных схемах Суслина со значениями в $\mathcal{E}$. Множества этого класса называют $\mathcal{E}$-суслинскими.

Если X — полное сепарабельное метрическое пространство и $\mathcal{E}$ — класс всех замкнутых множеств в нем, то множества из $S(\mathcal{E})$ называются суслинскими или аналитическими в X.

Сам М.Я. Суслин ввел свои множества на прямой, используя класс отрезков.

Отметим, что если класс $\mathcal{E}$ допускает конечные объединения, то при построении суслинских множеств можно обойтись монотонными схемами Суслина. Действительно, можно перейти к монотонной таблице $E^*_{n_1,\ldots,n_k} = \bigcap_{m=1}^k E_{n_1,\ldots,n_m}$, дающей то же множество. Далее будем рассматривать монотонные схемы.

Приведем теперь основные факты теории суслинских множеств, причем лишь два из них будут даны с доказательствами.

Пример 3.2. В виде результата применения A-операции можно представить любые счетные объединения и счетные пересечения элементов класса $\mathcal{E}$.

Доказательство. В первом случае достаточно положить $E_{n_1,\ldots,n_k} = E_{n_1}$, а во втором $E_{n_1,\ldots,n_k} = E_k$. □

Теорема 3.3. (i) $S\bigl(S(\mathcal{E})\bigr) = S(\mathcal{E})$. *В частности, класс $S(\mathcal{E})$ допускает счетные объединения и пересечения.*

(ii) *Если дополнение каждого множества из $\mathcal{E}$ входит в $S(\mathcal{E})$ (например, является не более чем счетным объединением элементов $\mathcal{E}$) и $\varnothing \in \mathcal{E}$, то σ-алгебра $\sigma(\mathcal{E})$, порожденная $\mathcal{E}$, содержится в классе $S(\mathcal{E})$.*

Следующий фундаментальный результат показывает, что A-операция сохраняет измеримость. Это утверждение совсем не очевидно и, более того, весьма удивительно: ведь при A-операции производится несчетное объединение.

Теорема 3.4. *Пусть μ — конечная неотрицательная мера на σ-алгебре $\mathcal{M}$. Тогда класс $\mathcal{M}_\mu$ всех μ-измеримых множеств замкнут относительно A-операции. Более того, если некоторое семейство множеств $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$ замкнуто относительно конечных объединений и счетных пересечений, то*

$$\mu^*(A) = \sup\bigl\{\mu(E)\colon\ E \subset A,\ E \in \mathcal{E}\bigr\}$$

для каждого $\mathcal{E}$-суслинского множества A. В частности, каждое $\mathcal{E}$-суслинское множество μ-измеримо.

Доказательство. Первое утверждение является простым следствием второго применительно к $\mathcal{E} = \mathcal{M}_\mu$. Поэтому будем доказывать второе утверждение. Пусть множество A получено с помощью некоторой монотонной таблицы множеств $E_{n_1,\ldots,n_k} \in \mathcal{E}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Для каждого набора $m_1, \ldots, m_k$ обозначим через $D_{m_1,\ldots,m_k}$ объединение множеств $E_{n_1,\ldots,n_k}$ по всем $n_1 \leqslant m_1, \ldots, n_k \leqslant m_k$. Положим

$$M_{m_1,\ldots,m_k} := \bigcup_{(n_i)\in\mathbb{N}^\infty,\ n_1\leqslant m_1,\ldots,n_k\leqslant m_k} \bigcap_{j=1}^{\infty} E_{n_1,\ldots,n_j}.$$

Ясно, что при $m \to \infty$ множества M_m возрастают к A, а множества $M_{m_1,\ldots,m_k,m}$ с фиксированными $m_1,\ldots,m_k$ при $m \to \infty$ возрастают к множеству $M_{m_1,\ldots,m_k}$. Ввиду задачи 2.2 существует номер m_1 с $\mu^*(M_{m_1}) > \mu^*(A) - \varepsilon 2^{-1}$. Затем найдется номер m_2 с $\mu^*(M_{m_1,m_2}) > \mu^*(M_{m_1}) - \varepsilon 2^{-2}$. Продолжим это построение по индукции и получим последовательность натуральных чисел m_k с таким свойством, что

$$\mu^*(M_{m_1,m_2,\ldots,m_k}) > \mu^*(M_{m_1,m_2,\ldots,m_{k-1}}) - \varepsilon 2^{-k}.$$

Следовательно, для всех k получаем

$$\mu^*(M_{m_1,m_2,\ldots,m_k}) > \mu^*(A) - \varepsilon.$$

Ввиду замкнутости $\mathcal{E}$ относительно конечных объединений имеем

$$D_{m_1,\ldots,m_k} \in \mathcal{E},$$

а замкнутость $\mathcal{E}$ относительно счетных пересечений дает включение

$$E := \bigcap_{k=1}^{\infty} D_{m_1,\ldots,m_k} \in \mathcal{E}.$$

Поскольку $M_{m_1,\ldots,m_k} \subset D_{m_1,\ldots,m_k}$, то из предыдущей оценки получаем

$$\mu^*(D_{m_1,m_2,\ldots,m_k}) > \mu^*(A) - \varepsilon,$$

откуда $\mu(E) \geqslant \mu^*(A) - \varepsilon$, ибо множества $D_{m_1,m_2,\ldots,m_k}$ убывают к E.

Остается доказать, что $E \subset A$. Пусть $x \in E$. Тогда при всех k имеем

$$x \in D_{m_1,\ldots,m_k}.$$

Поэтому $x \in E_{n_1,\ldots,n_k}$ для некоторого набора $n_1,\ldots,n_k$ с

$$n_1 \leqslant m_1, \ldots, n_k \leqslant m_k.$$

Такие наборы будем называть допустимыми. Наша задача состоит в том, чтобы построить такую бесконечную последовательность $n_1, n_2, \ldots$, что все ее начальные отрезки $n_1,\ldots,n_k$ являются допустимыми. В этом случае будем иметь $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_1,\ldots,n_k} \subset A$. Чтобы построить такую последовательность, заметим, что у нас для всякого $k > 1$ имеются допустимые наборы из k чисел. Будем называть допустимый набор $n_1,\ldots,n_k$ продолжающимся, если для всякого $l \geqslant k$ найдется допустимый набор $p_1,\ldots,p_l$ с $p_1 = n_1,\ldots,p_k = n_k$. Теперь заметим, что существует хотя бы один продолжающийся набор n_1 длины 1. Действительно, предположим противное. Поскольку всякий начальный отрезок $n_1,\ldots,n_k$ всякого допустимого набора $n_1,\ldots,n_k,\ldots,n_l$ является допустимым в силу включения $E_{n_1,\ldots,n_l} \subset E_{n_1,\ldots,n_k}$, то для каждого $n \leqslant m_1$ имеется максимальная длина $l(n)$ допустимых наборов с n на первой позиции. Значит, длины всех допустимых наборов равномерно ограничены и мы приходим к противоречию. Аналогично, продолжающийся набор n_1 содержится в некотором продолжающемся наборе n_1, n_2 и т.д. Полученная последовательность — искомая. □

Следствие 3.5. *Если $(X, \mathcal{A})$ и $(Y, \mathcal{B})$ — измеримые пространства и отображение $f\colon X \to Y$ таково, что $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ для всех $B \in \mathcal{B}$, то для всякого множества $E \in S(\mathcal{B})$ множество $f^{-1}(E)$ входит в $S(\mathcal{A})$ и потому измеримо относительно всякой меры на $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Проверьте, ясно, что $f^{-1}(E) \in S(\mathcal{A})$. □

Класс суслинских множеств в полном сепарабельном метрическом пространстве получается А-операцией также из открытых множеств, ибо всякое замкнутое множество есть счетное пересечение открытых, а всякое открытое есть счетно объединение замкнутых. Более того, из этого видно, что достаточно использовать лишь счетное число открытых (или замкнутых) шаров рационального радиуса с центрами в точках из какого-либо всюду плотного счетного множества.

Ясно, что в случае $\mathbb{R}^n$ тот же самый результат дает и применение А-операции к классу всех компактов в $\mathbb{R}^n$. Действительно, если A содержится в кубе K, то порождающие A замкнутые множества $A_{\nu_1,\ldots,\nu_k}$ можно заменить на компакты $A_{\nu_1,\ldots,\nu_k} \cap K$. Неограниченное суслинское множество A представим в виде объединения последовательности его пересечений $A \cap K_j$ с возрастающими кубами K_j. Остается воспользоваться тем, что класс множеств, полученных А-операцией из компактов, допускает счетные объединения.

Как было сказано выше, из теоремы 3.3 вытекает, что борелевские множества в $\mathbb{R}^n$ являются суслинскими. Отметим еще, что если L — линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$ размерности $k < n$, то пересечение L с произвольным суслинским множеством A из $\mathbb{R}^n$ будет суслинским в пространстве L. Это вытекает из того, что пересечение любого замкнутого множества с L замкнуто в L. Обратно, всякое суслинское множество из L является суслинским и в $\mathbb{R}^n$.

Следующее утверждение играет важную роль в теории меры.

Предложение 3.6. *При непрерывном отображении из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^d$ образ суслинского множества является суслинским множеством.*

Доказательство. Пусть множество A задано таблицей компактных множеств $A_{n_1,\ldots,n_k}$ (ясно, что это возможно для каждого суслинского множества в $\mathbb{R}^n$). Как указано выше, можно считать, что при всех k мы имеем $A_{n_1,\ldots,n_k,n_{k+1}} \subset A_{n_1,\ldots,n_k}$. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ — непрерывное отображение. Ясно, что

$$f(A) = \bigcup_{(n_i)\in\mathbb{N}^\infty} f\Bigl(\bigcap_{k=1}^\infty A_{n_1,\ldots,n_k}\Bigr).$$

Остается заметить, что множества $B_{n_1,\ldots,n_k} = f(A_{n_1,\ldots,n_k})$ компактны в силу непрерывности f и что

$$f\Bigl(\textstyle\bigcap_{k=1}^\infty A_{n_1,\ldots,n_k}\Bigr) = \textstyle\bigcap_{k=1}^\infty f(A_{n_1,\ldots,n_k}).$$

Действительно, левая часть этого равенства содержится в правой для любых множеств и отображений. Пусть $y \in \bigcap_{k=1}^\infty f(A_{n_1,\ldots,n_k})$. Тогда для каждого k имеется $x_k \in A_{n_1,\ldots,n_k}$ с $f(x_k) = y$. Если для бесконечного множества индексов k точки x_k совпадают с одной и той же точкой x, то $x \in \bigcap_{k=1}^\infty A_{n_1,\ldots,n_k}$ в силу вложенности множеств $A_{n_1,\ldots,n_k}$. При этом $f(x) = y$. Поэтому остается рассмотреть случай, когда последовательность $\{x_k\}$ содержит бесконечное число разных точек. Поскольку она содержится в компакте A_{n_1}, то существует предельная точка x для $\{x_k\}$. Тогда $x \in A_{n_1,\ldots,n_k}$ при всех k, ибо $x_j \in A_{n_1,\ldots,n_k}$ при всех $j \geqslant k$ и $A_{n_1,\ldots,n_k}$ — замкнутое множество. Итак, $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_1,\ldots,n_k}$. В силу непрерывности f имеем $f(x) = y$. $\square$

Следствие 3.7. *Образ всякого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}^n$ при непрерывном отображении $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ является суслинским множеством. В частности, множество $f(B)$ измеримо по Лебегу.*

В частности, ортогональная проекция борелевского множества является суслинским, а значит и измеримым, множеством. Ниже мы увидим, что суслинские множества в $\mathbb{R}^n$ совпадают с ортогональными проекциями борелевских множеств из $\mathbb{R}^{n+1}$ (тем самым, суслинские множества можно определить без A-операции) и что существуют неборелевские суслинские множества. Легко проверить, что произведение двух борелевских множеств в $\mathbb{R}^n$ является борелевским в $\mathbb{R}^{2n}$. В самом деле, достаточно проверить, что $A\times\mathbb{R}^n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2n})$ при $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Это верно для открытых A, а потому и для всех борелевских A, ибо класс всех борелевских множеств A с таким свойством является σ-алгеброй.

Пример 3.8. Пусть A и B — непустые борелевские множества в $\mathbb{R}^n$. Тогда векторная сумма множеств A и B, определяемая равенством

$$A + B := \{a + b\colon\ a \in A, b \in B\}$$

является суслинским множеством. Кроме того, суслинской является и выпуклая оболочка $\operatorname{conv} A$ множества A — наименьшее выпуклое множество, содержащее A. Действительно, $A+B$ есть образ борелевского множества $A\times B$ в $\mathbb{R}^{2n}$ при непрерывном отображении $(x, y) \mapsto x + y$. Выпуклая оболочка A состоит из всех сумм вида $\sum_{i=1}^{k} t_i a_i$, где $t_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$, $a_i \in A$, $k \in \mathbb{N}$. При этом для каждого фиксированного k множество

$$S := \Big\{(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k\colon\ \sum_{i=1}^{k} t_i = 1, t_i \geqslant 0\Big\}$$

борелево, поэтому множество $A^k \times S$ в $(\mathbb{R}^n)^k \times \mathbb{R}^k$ также борелево, а его образ при отображении $(a_1, \ldots, a_k, t_1, \ldots, t_k) \mapsto \sum_{i=1}^{k} t_i a_i$ является суслинским.

Приведем основную теорему о характеризации суслинских множеств как проекций.

Теорема 3.9. *Пусть A — множество в полном сепарабельном метрическом пространстве X. Следующие условия равносильны:*
(i) *A — суслинское множество;*
(ii) *A является проекций борелевского множества в $X \times \mathbb{R}$;*
(iii) *A является проекций замкнутого множества в $X \times \mathbb{N}^{\infty}$.*

Таким образом, суслинские множества на прямой — в точности проекции борелевских множеств на плоскости (конечно, недостаточно брать проекции лишь замкнутых множеств на плоскости — это даст лишь счетные объединения компактов, т.е. весьма узкий класс множеств).

4 Образ меры при отображении

Пусть даны измеримые пространства $(X,\mathcal{A})$ и $(Y,\mathcal{B})$, т.е. пространства с σ-алгебрами. Пусть $f\colon X\to Y$ — измеримое отображение, т.е. $f^{-1}(B)\in\mathcal{A}$ при всех $B\in\mathcal{B}$. Тогда для всякой меры μ на $\mathcal{A}$ возникает мера $\mu\circ f^{-1}$ на $\mathcal{B}$, заданная формулой

$$\mu\circ f^{-1}(B)=\mu\bigl(f^{-1}(B)\bigr)$$

и называемая образом μ при отображении f. Счетная аддитивность этой меры очевидна из того, что для дизъюнктных множеств B_n их прообразы дизъюнктны и дают в объединении прообраз объединения множеств B_n.

Без труда проверяется следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть μ — неотрицательная мера на $\mathcal{A}$. Функция g на Y интегрируема относительно меры $\mu\circ f^{-1}$ в точности тогда, когда функция $g\circ f$ интегрируема относительно μ. При этом*

$$\int_Y g(y)\,\mu\circ f^{-1}(dy)=\int_X g\bigl(f(x)\bigr)\,\mu(dx).$$

Указанная формула верна по определению для индикаторов множеств, значит, верна для функций с конечным числом значений, откуда с помощью равномерных приближений распространяется на ограниченные $\mathcal{B}$-измеримые функции, что позволяет получить общий случай.

Из весьма разнообразных задач, возникающих в самых различных областях в связи с образами мер, отметим следующие:

1) для заданных мер μ и ν выяснить существование отображений, переводящих μ в ν; как мы увидим далее, эта задача разрешима при весьма широких условиях;

2) для заданных меры ν и отображения f выяснить существование меры μ, переходящей в ν под действием f; эта задача также разрешима при широких условиях.

Разумеется, какие-то условия нужны; например, меру с точками положительной меры невозможно перевести в меру без таких точек, а постоянное отображение переводит всякую меру в меру, сосредоточенную в точке.

В связи с отображениями мер мы обсудим так называемую теорему об измеримом выборе.

5 Теорема об измеримом выборе

Если дана сюръекция $f\colon X\to Y$ двух пространств, то для каждого $y\in Y$ с помощью аксиомы выбора можно получить точку $x(y)\in f^{-1}(y)$, что дает отображение $g\colon Y\to X$ с $f\bigl(g(y)\bigr)=y$ при всех y, если положить $g(y)=x(y)$. Такое отображение называют правым обратным.

Однако обычно бывает нужно получить отображение g с какими-то дополнительными свойствами типа непрерывности или измеримости. Это не всегда возможно, но случаи положительного решения (в каком-либо смысле) называют соответственно теоремами о непрерывном или измеримом выборе. Нас будет интересовать случай, когда X и Y — полные сепарабельные метрические пространства или суслинские множества в таких пространствах, а отображение f измеримо по Борелю (например непрерывно). Как мы увидим далее, даже отрезка не всегда можно добиться борелевости отображения g, но всегда можно сделать g измеримым относительно σ-алгебры, порожденной суслинскими множествами в Y.

Сначала рассмотрим совсем простой случай, обоснование которого несложно.

Пример 5.1. Пусть $f\colon [0,1] \to [0,1]$ — непрерывная сюръекция. Положим

$$g(y) = \min\{x \in f^{-1}(y)\}.$$

Тогда g — борелевское правое обратное.

Близкая идея используется в следующей замечательной теореме Янкова, охватывающей общую ситуации (в которой борелевского обратного уже может и не быть).

Теорема 5.2. *Пусть X и Y — суслинские пространства и $F\colon X \to Y$ — борелевское отображение, причем $F(X) = Y$. Тогда найдется такое отображение $G\colon Y \to X$, что $F\bigl(G(y)\bigr) = y$ для всех $y \in Y$, причем G измеримо относительно σ-алгебры, порожденной суслинскими подмножествами в Y. Кроме того, множество $G(Y)$ входит в σ-алгебру $\sigma(\mathcal{S}_X)$, порожденную суслинскими множествами в X.*

Доказательство. Предположим сначала, что F непрерывно. Поскольку X является образом пространства $\mathbb{N}^\infty$ при непрерывном отображении p, то достаточно доказать теорему для $\mathbb{N}^\infty$ и взять в качестве искомого композицию p с отображением, построенным для $\mathbb{N}^\infty$. Итак, можно считать, что X есть $\mathbb{N}^\infty$. На $\mathbb{N}^\infty$ задан лексикографический порядок: $(n_i) < (k_i)$, если либо $n_1 < k_1$, либо $n_1 = k_1, \ldots, n_m = k_m$ и $n_{m+1} < k_{m+1}$ для некоторого $m \geqslant 1$. Положим $x \leqslant z$, если $x < z$ или $x = z$. Для каждого $y \in Y$ в качестве $G(y)$ возьмем в множестве $F^{-1}(y)$ (которое непусто по условию и замкнуто в силу непрерывности F) наименьший элемент в смысле лексикографического порядка. Заметим, что такой элемент существует. Действительно, обозначим $F^{-1}(y)$ через Z и возьмем любой элемент $x^1 = (x_i^1) \in Z$, для которого $x_1^1 \leqslant z_1$ для всех $z = (z_i) \in Z$. Затем найдем такой элемент $x^2 = (x_i^2) \in Z$, что $x_2^2 = x_2^1$ и $x_2^2 \leqslant z_2$ для всех таких $z = (z_i) \in Z$, что $z_1 = x_1^1$. Затем находим элемент $x^3 \in Z$ с $x_1^3 = x_1^2$, $x_2^3 = x_2^2$ и $x_3^3 \leqslant z_3$ для всех таких $z = (z_i) \in Z$, что $z_i = x_i^2$ при $i = 1, 2$. По индукции строим элементы $x^k \in Z$ со следующими свойствами: $x_i^{k+1} = x_i^k$ при $i \leqslant k$ и $x_{k+1}^{k+1} \leqslant z_{k+1}$ для всех таких $z = (z_i) \in Z$, что $z_i = x_i^k$ при $i \leqslant k$. Рассмотрим элемент $x = (x_i^i)$. Последовательность элементов x^k сходится к x в $\mathbb{N}^\infty$ и потому в силу замкнутости Z получаем $x \in Z$. При этом $x \leqslant z$ для всех $z \in Z$. Действительно, в противном случае при некотором k имеем $x_1 = z_1, \ldots, x_k = z_k$, $z_{k+1} < x_{k+1} = x_{k+1}^{k+1}$. Тогда $z_i = x_i^i$ при $i \leqslant k$, что ведет к противоречию с выбором x_{k+1}.

По построению $F\bigl(G(y)\bigr) = y$. Проверим, что для всякого борелевского множества $B \subset \mathbb{N}^\infty$ множество $G^{-1}(B)$ входит в σ-алгебру $\mathcal{A}$, порожденную всеми суслинскими подмножествами Y. Поскольку совокупность всех борелевских множеств B с этим свойством является σ-алгеброй, то достаточно провести проверку для замкнутых множеств вида

$$B = \big\{(n_i) \in \mathbb{N}^\infty\colon\ (n_i) \leqslant (b_i)\big\},$$

где $b_i \in \mathbb{N}$ фиксированы. Действительно, как легко видеть, эти множества порождают $\mathcal{B}(\mathbb{N}^\infty)$. Ясно, что $G^{-1}(B) = F(B)$. Действительно, если $G(y) \in B$, то $y \in F(B)$. Если $y = F(\eta)$, где $\eta \in B$, то $G(y) \leqslant \eta$ и потому $G(y) \in B$, т.е. $y \in G^{-1}(B)$. Поскольку $F(B)$ является суслинским, то $G^{-1}(B)$ входит в σ-алгебру $\mathcal{A}$.

Рассмотрим теперь общий случай. Тогда график Γ отображения F является суслинским подмножеством $X\times Y$. Проекция $\pi_Y\colon\ \Gamma \to Y$ непрерывна. По доказанному существует такое измеримое отображение $\Psi\colon\ (Y,\mathcal{A}) \to \big(\Gamma, \mathcal{B}(\Gamma)\big)$, что $\pi_Y \circ \Psi(y) = y$ для всех $y \in Y$. Пусть $\pi_X\colon\ \Gamma \to X$ — естественная проекция. Положим $G = \pi_X \circ \Psi$. Тогда

$$F \circ G(y) = F \circ \pi_X \circ \Psi(y) = \pi_Y \circ \Psi(y) = y \quad \forall\, y \in Y,$$

ибо $\Psi(y) = \big(x, F(x)\big)$, где $x = \pi_X\big(\Psi(y)\big)$ и $F(x) = \pi_Y\big(\Psi(y)\big)$. Из непрерывности π_X и измеримости Ψ относительно $\mathcal{A}$ следует, что и G обладает этим свойством. Покажем, что $G(Y) \in \sigma(\mathcal{S}_X)$. Пусть $T(x) = G\big(F(x)\big)$. Имеем

$$G(Y) = \{x \in X\colon\ T(x) = x\}.$$

Множество в правой части есть пересечение множеств $\{f_n = f_n \circ T\}$, где $\{f_n\}$ — счетное семейство борелевских функций X, разделяющее точки. Остается заметить, что функции $f_n \circ T$ измеримы относительно σ-алгебры $\sigma(\mathcal{S}_X)$. Это вытекает из $\big(\sigma(\mathcal{S}_Y), \mathcal{B}(X)\big)$-измеримости G и $\big(\sigma(\mathcal{S}_X), \sigma(\mathcal{S}_Y)\big)$-измеримости F (последнее является следствием борелевской измеримости F. $\square$

Следствие 5.3. *В ситуации предыдущей теоремы для всякой борелевской меры ν на Y найдется такая борелевская меры μ на X, что $\nu = \mu \circ F^{-1}$. Если ν — вероятностная мера, то μ также можно взять вероятностной.*

Доказательство. Можно взять $\mu = \nu \circ G^{-1}$. $\square$

Отметим, что указанная мера μ сосредоточена на измеримом множестве $G(Y)$, которое посредством F взаимно однозначно отображается на Y. Поэтому в $G(Y)$ можно взять счетное объединение возрастающих компактов K_n, имеющее μ-меру 1, на которых F непрерывно и взаимно однозначно, причем образ $\cup_n K_n$ будет также счетным объединением компактов.

Как обнаружил П.С. Новиков, борелевской селекции может не быть даже тогда, когда f — борелевская функция, отображающая $[0,1]$ на $[0,1]$. Приведем модификацию его, которую нам указал Ж. Сен Рэймон.

Теорема 5.4. *Существует такое непрерывное отображение F пространства $\mathbb{N}^\infty \times \{0,1\}$ на $\mathbb{N}^\infty$, что никакое суслинское множество не отображается инъективно посредством F на $\mathbb{N}^\infty$. В частности, не существует селекции G с суслинским образом $G(\mathbb{N}^\infty)$, а потому не существует борелевской селекции.*

Доказательство. Воспользуемся таким фактом (его доказательство можно найти в [1, теорема 6.8.11]): существуют дизъюнктные множества C_0 и C_1 в $\mathbb{N}^\infty$ с суслинскими дополнениями A_0 и A_1, такие, что C_0 и C_1 не разделяются борелевскими множествами. Можно найти непрерывные сюръекции $F_0\colon \mathbb{N}^\infty \to A_0$, $F_1\colon \mathbb{N}^\infty \to A_1$. Зададим отображение $F\colon \mathbb{N}^\infty \times \{0,1\} \to \mathbb{N}^\infty$ так:

$$F(\nu, 0) = F_0(\nu), \quad F(\nu, 1) = F_1(\nu).$$

Ясно, что получена непрерывная сюръекция, поскольку

$$A_0 \cup A_1 = \mathbb{N}^\infty.$$

Предположим, что существует суслинское множество $S \subset \mathbb{N}^\infty \times \{0,1\}$, на котором F инъективно и $F(S) = \mathbb{N}^\infty$. Пусть

$$S_i := \{\nu \in \mathbb{N}^\infty\colon (\nu, i) \in S\}, \quad i = 0, 1.$$

Заметим, что множества $B_0 := F_0(S_0) = G^{-1}(\mathbb{N}^\infty \times \{0\})$ и $B_1 := F_1(S_1) = G^{-1}(\mathbb{N}^\infty \times \{1\})$ являются суслинскими и не пересекаются, а их объединение есть $\mathbb{N}^\infty$. Значит, оба множества — борелевские. Мы имеем $B_i \subset A_i$. Поэтому $C_0 \subset B_1$, $C_1 \subset B_0$, вопреки тому, что C_0 и C_1 не разделяются борелевскими множествами. Отсутствие борелевской селекции следует из борелевости образа $\mathbb{N}^\infty$ при инъективном борелевском отображении. $\square$

Следствие 5.5. *Можно найти такую борелевскую функцию $f\colon [0,1] \to [0,1]$ с $f([0,1]) = [0,1]$, что не существует борелевской функции $g\colon [0,1] \to [0,1]$, для которой $f\bigl(g(y)\bigr) = y$ при всех $y \in [0,1]$. В частности, нет такого борелевского множества в $[0,1]$, которое f инъективно отображало бы на $[0,1]$.*

Доказательство. Пространства $\mathbb{N}^\infty$ и $[0,1]$ борелевски изоморфны. $\square$

Следствие 5.6. *Существует непрерывное отображение $g\colon \mathbb{N}^\infty \to [0,1]$ с $g(\mathbb{N}^\infty) = [0,1]$ без борелевских селекций.*

Доказательство. Действительно, пусть Γ — график функции f из примера П.С. Новикова и π — проекция Γ на ось ординат. Тогда Γ — борелевское множество в $[0,1]^2$ и существует непрерывное отображение h пространства $\mathbb{N}^\infty$ на Γ. Отображение $g := \pi \circ h$ — искомое. Действительно, если существует борелевское множество $B \subset \mathbb{N}^\infty$, которое g инъективно отображает на $[0,1]$, то $B_0 := h(B)$ — борелевское в Γ. Проекция B_0 на ось абсцисс, обозначаемая через B_1, также является борелевским множеством (на Γ проекция инъективна), и $f(B_1) = [0,1]$. При этом функция f оказывается инъективной на B_1 из-за инъективности π на B_0, вытекающей из инъективности g на B. $\square$

Из доказанного получаем такую классификацию мер на суслинских пространствах.

Теорема 5.7. *Для всякой вероятностной меры ν на суслинском пространстве Y без точек положительной меры найдется такое борелевское подмножество $X \subset [0,1]$ лебеговской меры 1 и взаимно однозначное борелевское отображение f множества X на борелевское подмножество Y_0 меры 1 относительно ν, переводящее меру Лебега в меру ν, т.е. $\nu = \lambda \circ f^{-1}$.*

Доказательство. Найдется непрерывная сюръекция F множества иррациональных чисел $\mathcal{R}$ в $[0,1]$ на Y. По доказанному выше найдется борелевская вероятностная мера μ на $\mathcal{R}$, образ которой есть ν, причем μ сосредоточена на множестве $G(Y)$, где G — измеримое левое обратное для F, так что F взаимно однозначно переводит $G(Y)$ в Y. Ясно, что μ не имеет атомов. Теперь остается перевести меру Лебега λ в меру μ с помощью инъективного борелевского отображения. Это можно сделать с помощью функции распределения меры μ, заданной формулой

$$F_\mu(t) = \mu([0,t)).$$

В качестве искомого отображения можно взять

$$f(t) = \inf\{s\colon\ F_\mu(s) = t\}.$$

Для обоснования достаточно проверить, что образ μ относительно F_μ есть мера Лебега. □

Из доказанной теоремы следует, что всякие две вероятностные меры μ_1 и μ_2 на суслинских пространствах X_1 и X_2 изоморфны в следующем смысле: найдутся борелевские множества $B_1 \subset X_1$ и $B_2 \subset X_2$ и взаимно однозначное борелевское отображение f множества B_1 на B_2, для которых

$$\mu_1(B_1) = \mu_2(B_2) = 1 \quad \text{и} \quad \mu_2 = \mu_1 \circ f^{-1}.$$

Разумеется, не всегда можно взять в качестве B_1 и B_2 исходные пространства X_1 и X_2. Скажем, этого нельзя сделать для $X = [0,1]$ и неборелевского X_2.

Стоит упомянуть здесь и следующий удивительный результат А.А. Ляпунова, согласно которому в данную меру ν можно подобранным преобразованием перегнать не одну, а сразу несколько заранее данных мер.

Теорема 5.8. *Пусть ν — вероятностная мера без точек положительной меры на суслинском пространстве Y, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — вероятностные меры без точек положительной меры на суслинском пространстве X. Тогда найдется такое борелевское отображение $f\colon\ X \to Y$, что*

$$\nu = \mu_i \circ f^{-1} \quad \textit{сразу для всех } i = 1, \ldots, n.$$

Отметим, что доказательство нетривиально уже для двух мер на отрезке и меры Лебега в качестве ν (впрочем, к отрезку с мерой Лебега все и сводится в силу предыдущих результатов).

6 Слабая сходимость мер

Пусть X — полное сепарабельное метрическое пространство, $\mathcal{M}(X)$ — пространство ограниченных борелевских мер на X, $\mathcal{P}(X)$ — подпространство вероятностных мер.

Всякая мера $\mu \in \mathcal{M}(X)$ единственным образом разлагается в разность двух взаимно сингулярных неотрицательных мер:

$$\mu = \mu^+ - \mu^-.$$

Взаимная сингулярность означает существование дизъюнктных борелевских множеств X^+ и X^- с $X = X^+ \cup X^-$, $\mu^+(X^-) = \mu^-(X^+) = 0$. Меры μ^+ и μ^- можно задать явно:

$$\mu^+(B) = \sup\{\mu(A)\colon\ A \subset B,\ A \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Мера

$$|\mu| := \mu^+ + \mu^-$$

называется полной вариацией меры μ. Отметим, что это отнюдь не функция множества $B \mapsto |\mu(B)|$, которая не является мерой в случае знакопеременной меры.

Величина

$$\|\mu\| := |\mu|(X)$$

называется вариацией или вариационной нормой меры μ.

Сходимость по этой норме называют сходимостью по вариации.

Лемма 6.1. *Для всякой меры $\mu \in \mathcal{M}(X)$ верны равенства*

$$\|\mu\| = \sup_{f\colon\ |f| \leqslant 1} \int_X f\, d\mu,$$

$$\|\mu\| = \sup_{f \in C(X)\colon\ |f| \leqslant 1} \int_X f\, d\mu,$$

где в первом равенстве рассматриваются борелевские функции f.

Доказательство. Первое равенство очевидно. Для доказательства второго зафиксируем $\varepsilon > 0$ и в множества X^+ и X^- впишем компакты K^+ и K^- с $\mu^+(X^+ \backslash K^+) + \mu^-(X^- \backslash K^-) < \varepsilon$. Затем найдем функцию $f \in C_b(X)$, равную 1 на K^+ и -1 на K^-, удовлетворяющую оценке $|f| \leqslant 1$. Ясно, что интеграл от f отличается от $\|\mu\|$ не более, чем на ε. □

Таким образом, всякая мера из $\mathcal{M}(X)$ задает функционал на пространстве $C_b(X)$ с нормой, равной ее вариации.

Определение 6.2. *Последовательность мер $\mu_n \in \mathcal{M}(X)$ слабо сходится к мере $\mu \in \mathcal{M}(X)$, если*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f\, d\mu_n = \int_X f\, d\mu \quad \forall\, f \in C_b(X).$$

Обозначение: $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Заметим, что из теоремы Банаха – Штейнгауза следует, что слабо сходящаяся последовательность мер ограничена по вариации.

Ясно, что если $\|\mu_n - \mu\| \to 0$, то $\mu_n \Rightarrow \mu$. Обратное, конечно, неверно: скажем, если мера μ_1 задана вероятностной плотностью p_1 с носителем в $[-1, 1]$, μ_n задана плотностью $p_n(t) = np_1(nt)$, то меры μ_n слабо сходятся к мере Дирака δ в нуле.

Напомним, что функция распределения меры μ на прямой задается формулой

$$F_\mu(t) = \mu\bigl((-\infty, t)\bigr).$$

Пример 6.3. Последовательность вероятностных мер μ_n на $\mathbb{R}$ слабо сходится к вероятностной мере μ в точности тогда, когда

$$F_{\mu_n}(t) \to F_\mu(t)$$

во всех точках непрерывности F_μ.

Доказательство. Пусть $\mu_n \Rightarrow \mu$ и t — точка непрерывности F_μ. Для данного $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ так, что $\mu(t-\delta, t+\delta) < \varepsilon$. Пусть $f \in C_b(\mathbb{R})$, $0 \leqslant f \leqslant 1$, $f(s) = 1$ при $s \leqslant t$, $f(s) = 0$ при $s \geqslant t+\delta$. Тогда $F_{\mu_n}(t)$ не больше интеграла от f по мере μ_n, который при больших n отличается не более, чем на ε от интеграла от f по мере μ, что в свою очередь отличается от $F_\mu(t)$ не более, чем на ε. Аналогично рассуждаем с функцией f, равной 1 при $s \leqslant t-\delta$ и 0 при $s \geqslant t$.

Обратно, пусть имеет место указанная сходимость и $f \in C_b(\mathbb{R})$. Пусть $\varepsilon > 0$. Можно считать, что $|f| \leqslant 1$. Возьмем точки непрерывности a и b функции F_μ так, что $F_\mu(a) < \varepsilon$, $F_\mu(b) > 1-\varepsilon$. При достаточно больших n имеем такие же оценки для мер μ_n. Более того, можно эти точки взять так, что в них непрерывны и все F_{μ_n} (множество всех точек разрыва не более чем счетно). Найдем такую гладкую функцию g, что $|g| \leqslant 1$ и $|f(t) - g(t)| \leqslant \varepsilon$ при $t \in [a, b]$. По формуле интегрирования по частям получаем

$$\int_a^b g\, d\mu_n = F_{\mu_m} g|_a^b - \int_a^b g'(t) F_{\mu_n}(t)\, dt,$$

а также аналогичную формулу для F_μ. При больших n правая часть отличается от правой части для F_μ не более, чем на ε (в силу условия и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости). Значит, интегралы от f по $[a, b]$ по мерам μ_n и μ отличаются не более, чем на 2ε. Наконец, интегралы от f по дополнению $[a, b]$ по мерам μ_n и μ по абсолютной величине не превосходят ε. $\square$

Для знакопеременных мер такой равносильности нет.

Пример 6.4. Разделим $[0, 1]$ на 2^n равных промежутков точками $t_{i,n}$, $i = 1, \ldots, 2^n$, рассмотрим меры $\mu_{n,i} = \delta_{t_{n,i-1}} - \delta_{t_{n,i}}$ и занумеруем их подряд: $\mu_{1,1}$, $\mu_{1,2}$, $\mu_{2,1}, \mu_{2,2}, \mu_{2,3}, \mu_{2,4}$ и т.д. Это дает слабо сходящуюся к нулю последовательность мер, функции распределения которых не сходятся ни в одной точке из $(0, 1)$ (функция распределения меры $\mu_{n,i}$ равна 1 на $(t_{n,i-1}, t_{n,i})$ и 0 вне этого промежутка).

Однако для знакопеременных мер верно следующее.

Предложение 6.5. *Последовательность мер μ_n на $[a, b]$ слабо сходится к мере μ в точности тогда, когда она ограничена по вариации и функции F_{μ_n} сходятся к F_μ по мере Лебега.*

Доказательство. Пусть $\mu_n \Rightarrow \mu$. Тогда $\sup_n \|\mu_n\| < \infty$. В силу приводимой ниже задачи достаточно показать, что в $\{F_{\mu_n}\}$ есть подпоследовательность, сходящаяся к F_μ почти всюду. Ниже мы увидим, что последовательности мер μ_n^+ и μ_n^- содержат слабо сходящиеся подпоследовательности с одинаковыми индексами. Соответствующая подпоследовательность F_{μ_n} сходится почти всюду (на дополнении не более чем счетного множества). Обратное утверждение доказывается совершенно аналогично предыдущему примеру с помощью интегрирования по частям. $\square$

Задача 6.6. *Доказать, что измеримые функции* f_n *сходятся по мере к функции* f *в точности тогда, когда всякая подпоследовательность в* $\{f_n\}$ *содержит дальнейшую подпоследовательность, сходящуюся к* f *почти всюду.*

Докажем теперь важную теорему А.Д. Александрова.

Теорема 6.7. *Вероятностные меры* μ_n *на* X *слабо сходятся к вероятностной мере* μ *в точности тогда, когда для всякого замкнутого множества* Z *верно соотношение*

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(Z) \leqslant \mu(Z),$$

или, что равносильно, для всякого открытого множества U *верно соотношение*

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(U) \geqslant \mu(U).$$

Доказательство. Ясно, что указанные условия равносильны, ибо замкнутые множества — дополнения открытых. Пусть $\mu_n \Rightarrow \mu$. Тогда выполнение первого из указанных условий проверяется так же, как и в примере 6.3, учитывая, что для всякого замкнутого множества Z и всякого $\varepsilon > 0$ найдется функция $f \in C_b(X)$ с $|f| \leqslant 1$, равная 1 на Z и 0 вне ε-окрестности Z, причем μ-мера этой ε-окрестности стремится к $\mu(Z)$ при $\varepsilon \to 0$. Отметим, что f можно взять даже липшицевой.

Обратное утверждение является следствием доказанного в примере 6.3, ибо заключение этого примера дает слабую сходимость мер $\mu_n \circ f^{-1}$ к $\mu \circ f^{-1}$ для всех $f \in C_b(X)$. $\square$

Введем теперь следующее важное понятие.

Определение 6.8. *Семейство мер* $\mathcal{S}$ *на* X *называется равномерно плотным, если для каждого* $\varepsilon > 0$ *есть такой компакт* K_ε*, что*

$$|\mu|(X\backslash K_\varepsilon) < \varepsilon \quad \forall\, \mu \in \mathcal{S}.$$

Если X компактно, то любое семейство мер на X равномерно плотно.

Замечание 6.9. Пусть X компактно. Тогда всякая равномерно ограниченная последовательность мер на X содержит слабо сходящуюся подпоследовательность. В самом деле, согласно задаче ниже имеется счетное всюду плотное множество $\{f_i\}$ в $C_b(X)$. С помощью диагонального приема Кантора выделим подпоследовательность в $\{\mu_n\}$, для которой интегралы сходятся на каждой функции f_i. Тогда в силу равномерной ограниченности по вариации и плотности $\{f_i\}$ получим сходимость интегралов на всех ограниченных функциях. Предел представляет собой непрерывный линейный функционал на $C(X)$, который по теореме Рисса задается как интеграл по некоторой мере.

Замечание 6.10. Использованная в предыдущем замечании теорема Рисса о представлении непрерывного линейного функционала l на $C(X)$ для компакта X в виде

$$l(f) = \int_X f\, d\mu$$

с некоторой мерой $\mu \in \mathcal{M}(X)$ несложно доказывается для $X = [0,1]$. Поэтому она сразу переносится на компакты $X \subset [0,1]$. Для общего метрического компакта ее можно получить так: найдется непрерывная сюръекция $h\colon C \to X$ канторовского множества K; на подпространстве функций вида $f \circ h$ возникает функционал $l_0(f \circ h) = l(f)$ (он задан корректно из-за сюръективности h), который по теореме Хана – Банаха продолжается на все $C(K)$ и задается мерой ν на K; легко видеть, что l задается мерой $\mu = \nu \circ h^{-1}$.

Замечание 6.11. Для некомпактного X не всякий непрерывный линейный функционал на $C_b(X)$ задается как интеграл по мере из $\mathcal{M}(X)$. Например, на $C_b(\mathbb{R})$ можно взять функционал, полученный продолжением по теореме Хана – Банаха функционала $l(f) = \lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ на подпространстве функций, имеющих предел на бесконечности. Ясно, что полученный функционал не задается как интеграл.

В случае некомпактного пространства условие представимости функционала интегралом следующее: непрерывный линейный функционал l на $C_b(X)$ задается мерой из $\mathcal{M}(X)$ точности тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт K_ε, что $|l(f)| \leqslant \varepsilon$ для всех таких $f \in C_b(X)$, что $|f| \leqslant 1$ и $|f|\big|_{K_\varepsilon} \leqslant \varepsilon$.

Докажем теперь очень важную теорему Ю.В. Прохорова.

Теорема 6.12. *Всякая слабо сходящаяся последовательность мер на X равномерно плотна и равномерно ограничена.*

Обратно, из равномерно плотной ограниченной по вариации последовательности мер можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Ограниченность по вариации уже пояснялась. Предположим, что $\{\mu_n\}$ не является равномерно плотной. Покажем, что существует $\varepsilon > 0$ со следующим свойством: для каждого компакта $K \subset X$ можно найти такую меру μ_{n_K}, что справедливо неравенство

$$|\mu_{n_K}|(X\backslash K^\varepsilon) > \varepsilon, \tag{2}$$

где K^ε — замкнутая ε-окрестность K. В самом деле, в противном случае для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $K(\varepsilon) \subset X$, что

$$|\mu_n|\big(X\backslash K(\varepsilon)^\varepsilon\big) \leqslant \varepsilon \quad \forall n.$$

Для фиксированного $\delta > 0$ положим $K_j = K(\delta 2^{-j})^{\delta 2^{-j}}$ и получим множество $K = \bigcap_{j=1}^\infty K_j$, которое компактно, причем

$$|\mu_n|(X\backslash K) \leqslant \sum_{j=1}^\infty |\mu|(X\backslash K_j) \leqslant \delta \quad \forall\, n,$$

что является противоречием. Теперь с помощью (2) мы по индукции найдем последовательности попарно непересекающихся компактов K_j и мер μ_{m_j} со следующими свойствами:

1) $|\mu_{m_j}|(K_j) > \varepsilon$,

2) $K_{j+1} \subset X\backslash \bigcup_{i=1}^j K_i^\varepsilon$.

В качестве μ_{m_1} берем произвольную меру с $\|\mu_{m_1}\| > \varepsilon$ (ее существование вытекает из (2)), в качестве K_1 — компакт с $|\mu_1|(K_1) > \varepsilon$, затем по K_1 находим μ_{m_2} с помощью (2). Далее берем компакт $K_2 \subset X \backslash K_1^\varepsilon$ с $|\mu_{m_2}|(K_2) > \varepsilon$, полагаем $Q_2 = K_1 \cup K_2$ и находим меру μ_{m_3} с $|\mu_{m_3}|(X \backslash Q_2^\varepsilon) > \varepsilon$ и т.д. Из свойства 2) следует, что множества $U_j := K_j^{\varepsilon/4}$ попарно не пересекаются. Существуют такие непрерывные функции f_j, что $f_j = 0$ вне U_j, $|f_j| \leqslant 1$ и $\displaystyle\int_{U_j} f_j \, d\mu_{m_j} > \varepsilon$. Пусть

$$a_n^i = \int_X f_i(x) \, \mu_n(dx).$$

Тогда $a_n := (a_n^1, a_n^2, \ldots)$ входит в l^1, так как $\sum_{i=1}^\infty |f_i| \leqslant 1$. Для каждого $\lambda = (\lambda_i) \in l^\infty$ функция $f^\lambda = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i f_i$ непрерывна на X и $|f^\lambda| \leqslant \sup\limits_i |\lambda_i|$. Поскольку последовательность чисел

$$\langle \lambda, a_n \rangle = \int_X f^\lambda \, d\mu_n$$

сходится, то получаем, что последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна в топологии $\sigma(l^1, l^\infty)$. Согласно задаче 6.14 последовательность $\{a_n\}$ сходится по норме в l^1. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n = 0$, что противоречит выбору f_n.

Обратно, пусть ограниченная по вариации последовательность мер μ_n равномерно плотна. Для каждого j найдем компакт K_j с $|\mu_n|(X \backslash K_j) < 2^{-j}$ при всех n. Можно считать, что $K_j \subset K_{j+1}$. С помощью диагонального приема Кантора выберем подпоследовательность мер, слабо сходящуюся на каждом K_j (это возможно в силу сделанного выше замечания). Можно считать, что такова исходная последовательность. Предел сужений μ_n на K_j обозначим через ν_j; легко видеть, что $\nu_{j+1}|_{K_j} = \nu_j$. Это позволяет задать меру μ на X, сделав ее нулевой вне $\cup_j K_j$. Наконец, заметим, что $\mu_n \Rightarrow \mu$. В самом деле, пусть $f \in C_b(X)$, $|f| \leqslant 1$, $\varepsilon > 0$. Берем j так, что $|\mu_n|(X \backslash K_j) < \varepsilon$ и $|\mu|(X \backslash K_j) < \varepsilon$ при всех n. При достаточно больших n интегралы от f по K_j по мерам μ_n и μ отличаются менее, чем на ε. Интегралы по дополнению K_j не превосходят ε. □

Замечание 6.13. Из доказательства видно, что равномерная плотность следует уже из слабой фундаментальности $\{\mu_n\}$, т.е. фундаментальности интегралов от каждой функции $f \in C_b(X)$. Это показывает существование слабого предела слабо фундаментальной последовательности.

Задача 6.14. *Пусть последовательность векторов $v_n \in l^1$ такова, что для всякого $l \in l^\infty$ последовательность $l(v_n)$ сходится. Доказать, что $\{v_n\}$ сходится по норме в l^1.*

Задача 6.15. *Пусть K — метрический компакт. Доказать, что пространство $C(K)$ сепарабельно и в нем всюду плотно множество липшицевых функций.*

Задача 6.16. *Дана последовательность непустых компактов K_n в метрическом пространстве X, между которыми расстояния не меньше некоторого $r > 0$, а также числа $c_n \in [-1, 1]$. Доказать, что на X найдется ограниченная липшицева функция, равная c_n на K_n.*

7 Метрика Канторовича

Слабую сходимость вероятностных мер можно задать метрикой; имеется несколько классических метрик, задающих слабую сходимость: метрики Леви, Прохорова, Канторовича и другие. Здесь мы кратко обсудим две метрики Канторовича. Отметим, что слабая сходимость знакопеременных мер на общих пространствах не задается метрикой, но задается топологией.

Обозначим через $\mathrm{Lip}_1(X)$ пространство функций на X, удовлетворяющих условию Липшица с постоянной 1, т.е. $|f(x) - f(y)| \leqslant d(x, y)$.

Определение 7.1. *Для $\mu \in \mathcal{M}(X)$ положим*

$$\|\mu\|_0 = \sup\left\{\int_X f\,d\mu\colon\ f \in \mathrm{Lip}_1(X),\ sup_x|f(x)| \leqslant 1\right\}.$$

Метрика Канторовича d_0 задается формулой $d_0(\mu, \nu) = \|\mu - \nu\|_0$.

Теорема 7.2. *Вероятностные меры μ_n на X слабо сходятся к вероятностной мере μ в точности тогда, когда $\|\mu_n - \mu\|_0 \to 0$.*

Доказательство. Пусть $\mu_n \Rightarrow \mu$ и $\varepsilon > 0$. По теореме Прохорова найдется такой компакт K, что $|\mu_n|(X\backslash K) \leqslant \varepsilon$ для всех n и $|\mu_n|(X\backslash K) \leqslant \varepsilon$. Поэтому утверждение сводится к случаю компактного пространства. В этом случае при нарушении соотношения $\|\mu_n - \mu\|_0 \to 0$ найдутся индексы $i_n \to \infty$ и функции $f_n \in \mathrm{Lip}_1(X)$ с $|f_n| \leqslant 1$ и

$$\int f_n\,d\mu_{i_n} - \int f_n\,d\mu \geqslant c > 0.$$

Можно считать, что $i_n = n$. Из равномерно ограниченной и равномерно липшицевой последовательности $\{f_n\}$ на компакте можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность. Можно считать, что такова сама $\{f_n\}$, т.е. $f_n \rightrightarrows f$. Тогда получаем противоречие со сходимостью интегралов от f по мерам μ_n к интегралу по мере μ. Отметим, что доказанное верно и для знакопеременных мер.

Для получения обратной импликации мы установим даже несколько более общий факт: слабая сходимость вероятностных следует из сходимости интегралов от липшицевых функций (очевидным образом из сходимости в метрике Канторовича следует сходимость интегралов от любых ограниченных липшицевых функций). Это ясно из замечания про липшицевы функции, сделанного в доказательстве критерия А.Д. Александрова. $\square$

Обратная импликация для знакопеременных мер неверна. Например, меры $\mu_n = \sqrt{n}(\delta_{1/n} - \delta_0)$ на прямой не сходятся слабо, ибо $\|\mu_n\| = 2\sqrt{n}$, но $\|\mu_n\|_0 \leqslant 1/\sqrt{n}$. Аналогичный пример возможен для любого недискретного пространства.

Имеется еще одна важная метрика Канторовича, которую мы определим на множестве $\mathcal{P}_1(X)$ вероятностных мер на X, относительно которых интегрируемы липшицевы функции. Конечно, достаточно интегрируемости одной функции $d(x, x_0)$, где x_0 — фиксированная точка.

Определение 7.3. *Для $\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(X)$ положим*

$$d_K(\mu,\nu) = \|\mu-\nu\|_K = \sup\biggl\{ \int_X f\,d\mu\colon\ f\in \mathrm{Lip}_1(X)\biggr\}.$$

Метрика Канторовича d_K задается формулой $d_K(\mu,\nu) = \|\mu-\nu\|_K$, если на линейном пространстве $\mathcal{M}_1^0(X)$ знакопеременных мер σ, относительно которых интегрируема функция $d(x, x_0$ и $\sigma(X) = 0$, задать норму по формуле выше.

Ясно, что $\|\mu-\nu\|_0 \leqslant \|\mu-\nu\|_K$.

Метрика d_K интересна в связи со следующим представлением Канторовича.

Теорема 7.4. *Для всяких мер $\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(X)$ верно равенство*

$$d_K(\mu,\nu) = \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \int_{X\times X} d(x,y)\,\pi(dx\,dy),$$

где $\Pi(\mu,\nu)$ — множество всех борелевских вероятностных мер на $X\times X$ с проекциями μ и ν на сомножители.

Отметим, что множество $\Pi(\mu,\nu)$ непусто, ибо содержит меру $\mu\otimes\nu$, однако в нетривиальных случаях инфимум достигается не на этой продакт-мере.

Задача 7.5. *Доказать, что равномерно ограниченная последовательность функций на компакте, удовлетворяющих условию Липшица с общей постоянной, содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность.*

8 Условные математические ожидания и условные меры

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ — пространство с вероятностной мерой и $\mathcal{B}$ — некоторая под-σ-алгебра в $\mathcal{A}$.

Определение 8.1. *Пусть $f\in L^1(\mu)$. Условным математическим ожиданием f относительно σ-алгебры $\mathcal{B}$ и меры μ называется такая $\mathcal{B}$-измеримая μ-интегрируемая функция $\mathbb{E}^{\mathcal{B}} f$, что*

$$\int_\Omega gf\,d\mu = \int_\Omega g\mathbb{E}^{\mathcal{B}} f\,d\mu \tag{3}$$

для всякой ограниченной $\mathcal{B}$-измеримой функции g.

Условным математическим ожиданием индивидуальной интегрируемой функции f считается условное математическое ожидание соответствующего класса в $L^1(\mu)$.

Обратим внимание на то обстоятельство, что если $\mathcal{B}$-измеримая функция ψ п.в. равна $\mathbb{E}^{\mathcal{B}} f$, то она также является условным математическим ожиданием f, однако среди эквивалентных $\mathbb{E}^{\mathcal{B}} f$ функций могут быть и не $\mathcal{B}$-измеримые. Это требует дополнительной аккуратности при обычном отождествлении индивидуальных функций и классов эквивалентности. Разумеется, если определять условное математическое ожидание как класс эквивалентных $\mathcal{B}$-измеримых функций, то оно единственно.

Если $f \in L^2(\mu)$, то $\mathbb{E}^{\mathcal{B}} f$ есть ортогональная проекция f на замыкание линейной оболочки класса ограниченных $\mathcal{B}$-измеримых функций в $L^2(\mu)$. В общем случае существование условного математического ожидания следует из теоремы Радона – Никодима применительно к сужениям мер $f\cdot\mu$ и μ на σ-алгебру $\mathcal{B}$.

Легко проверить, что отображение $f \mapsto \mathbb{E}^{\mathcal{B}} f$ является непрерывным линейным оператором в $L^1(\mu)$ с единичной нормой. Однако равенство

$$\mathbb{E}^{\mathcal{B}}(f+g) = \mathbb{E}^{\mathcal{B}} f + \mathbb{E}^{\mathcal{B}} g$$

верно лишь почти всюду. Поэтому при рассмотрении функции множества

$$A \mapsto \mathbb{E}^{\mathcal{B}} I_A(x)$$

на $\mathcal{A}$ для фиксированного x нельзя утверждать, что она оказывается мерой. Ниже мы увидим, что в общем случае этого и нельзя добиться (хотя бы при почти всех x), однако при широких дополнительных условиях такая задача разрешима.

Определение 8.2. *Пусть даны σ-алгебра $\mathcal{A}$, ее под-σ-алгебра $\mathcal{B}$ и вероятностная мера μ на $\mathcal{A}$. Будем говорить, что функция*

$$\mu(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\colon\ \mathcal{A}\times X \to \mathbb{R}^1$$

представляет собой регулярную условную меру на $\mathcal{A}$ относительно $\mathcal{B}$, если

1) *для каждого x функция $A \mapsto \mu(A,x)$ — мера на $\mathcal{A}$;*

2) *для каждого $A \in \mathcal{A}$ функция $x \mapsto \mu(A,x)$ измерима относительно $\mathcal{B}$ и μ-интегрируема;*

3) *выполнено равенство*

$$\mu(A\cap B) = \int_B \mu(A,x)\,\mu(dx), \quad \forall\ A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}. \tag{4}$$

В приложениях бывает удобно иметь дело с σ-алгебрами, порожденными измеримыми отображениями. А именно, если $(Y,\mathcal{E})$ — измеримое пространство, $\pi\colon\ X \to Y$ — измеримое (относительно пары σ-алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{E}$) отображение, то возникает σ-алгебра $\mathcal{B} = \{\pi^{-1}(E)\colon\ E \in \mathcal{E}\}$, порожденная π, т.е. наименьшая σ-алгебра, относительно которой π измеримо. Впрочем, любая под-σ-алгебра $\mathcal{B}$ имеет такой вид: достаточно взять в качестве π тождественное отображение из $(X,\mathcal{A})$ в $(Y,\mathcal{E})$.

Определение 8.3. *Системой регулярных условных мер μ^y, $y \in Y$, порожденных $(\mathcal{A},\mathcal{E})$-измеримым отображением π из X в Y, будем называть функцию $(A,y) \mapsto \mu^y(A)$ на $\mathcal{A}\times Y$, которая при фиксированном y является мерой на $\mathcal{A}$, при фиксированном $A \in \mathcal{A}$ измерима относительно $\mathcal{E}$ и $\mu\circ\pi^{-1}$-интегрируема и для всех $A \in \mathcal{A}$, $E \in \mathcal{E}$ удовлетворяет равенству*

$$\mu\Big(A\cap\pi^{-1}(E)\Big) = \int_E \mu^y(A)\,\mu\circ\pi^{-1}(dy). \tag{5}$$

Если для почти каждой относительно меры $\mu\circ\pi^{-1}$ точки y из Y имеем $\pi^{-1}(y) \in \mathcal{A}$ и мера μ^y сосредоточена на $\pi^{-1}(y)$, то будем называть μ^y собственными условными мерами.

Лемма 8.4. *Если $\mathcal{A}$ — счетно-порожденная, то регулярная условная мера существенно единственна: для всяких двух таких мер $\mu_1(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ и $\mu_2(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ есть множество $Z \in \mathcal{B}$ такое, что $\mu(Z) = 0$ и $\mu_1(A,x) = \mu_2(A,x)$ для всех $A \in \mathcal{A}$ и $x \in X\backslash Z$.*

Если μ — вероятностная мера, то таковы и п.в. $\mu(\,\cdot\,,x)$.

Доказательство. Пусть счетная алгебра $\mathcal{A}' = \{A_n\}$ порождает $\mathcal{A}$. Ввиду (4) для каждого $A_n \in \mathcal{A}'$ найдется такое множество $Z_n \in \mathcal{B}$, что $\mu(Z_n) = 0$ и $\mu_1(A_n,x) = \mu_2(A_n,x)$ для всех $x \in X\backslash Z_n$. Теперь положим $Z := \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$.

Если μ — вероятностная мера, то для каждого n функция $\mu(A_n,x)$ неотрицательна μ-п.в., так как ее интеграл по каждому $B \in \mathcal{B}$ неотрицателен. Аналогично $\mu(X,x) = 1$ для μ-п.в. x. Поэтому для μ-п.в. x мера $\mu(\,\cdot\,,x)$ неотрицательна на $\mathcal{A}'$, причем $\mu(X,x) = 1$. Это показывает, что $\mu(\,\cdot\,,x)$ — вероятностная мера для таких x. □

Теорема 8.5. *Предположим, что σ-алгебра $\mathcal{A}$ является счетно-порожденной и что μ имеет компактный приближающий класс в $\mathcal{A}$. Тогда для каждой под-σ-алгебры $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ существует регулярная условная мера на $\mathcal{A}$.*

В частности, это верно для всякой борелевской меры на суслинском пространстве.

Представим полученные результаты в терминах порождающего $\mathcal{B}$ отображения π.

Теорема 8.6. *Пусть $(X,\mathcal{A},\mu)$ — пространство с вероятностной мерой, $(Y,\mathcal{E})$ — измеримое пространство и отображение $\pi\colon (X,\mathcal{A}) \to (Y,\mathcal{E})$ измеримо относительно $(\mathcal{A}_\mu,\mathcal{E})$, причем $\pi(X) \in \mathcal{E}_{\mu\circ\pi^{-1}}$, где $\mathcal{E}_{\mu\circ\pi^{-1}}$ — пополнение $\mathcal{E}$ относительно меры $\mu\circ\pi^{-1}$. Предположим, что $\mathcal{A}$ является счетно-порожденной, а мера μ обладает компактным приближающим классом. Тогда на $\mathcal{A}$ существуют вероятностные регулярные условные меры μ^y, $y \in Y$, порожденные π.*

Следствие 8.7. *Предположим, что в предыдущей теореме σ-алгебра $\mathcal{E}$ является счетно-порожденной и содержит все одноточечные множества. Тогда существуют регулярные условные меры μ^y на σ-алгебре $\mathcal{A}'$, порожденной $\mathcal{A}$ и $\pi^{-1}(\mathcal{E})$, причем для $|\mu|\circ\pi^{-1}$-п.в. y мера μ^y сосредоточена на множестве $\pi^{-1}(y)$. Если π обладает такой $(\mathcal{A},\mathcal{E})$-измеримой версией $\widetilde{\pi}$, что $\widetilde{\pi}(\mathcal{A})$ содержится в $\mathcal{E}_{\mu\circ f^{-1}}$, то $\pi^{-1}(y) \in \mathcal{A}_{\mu^y}$ для $\mu\circ\pi^{-1}$-п.в. y.*

Доказательство. При сделанных предположениях $\pi^{-1}(y) \in \mathcal{A}'$ для всех $y \in Y$. Пусть $\nu = \mu\circ\pi^{-1}$. Существует счетная алгебра множеств $\mathcal{E}_0 = \{E_n\}$, порождающая $\mathcal{E}$. Ясно, что $\mathcal{A}'$ также является счетно-порожденной. По доказанному, существуют регулярные условные меры μ^y, $y \in Y$, на $\mathcal{A}'$. Зафиксируем $E_n \in \mathcal{E}_0$. Для всякого $E \in \mathcal{E}$ справедливы равенства

$$\int_E \mu^y\bigl(\pi^{-1}(E_n)\bigr)\,\nu(dy) = \mu\bigl(\pi^{-1}(E)\cap\pi^{-1}(E_n)\bigr) = \mu\bigl(\pi^{-1}(E\cap E_n)\bigr)$$
$$= \nu(E\cap E_n) = \int_E I_{E_n}(y)\,\nu(dy),$$

откуда $\mu^y\big(\pi^{-1}(E_n)\big) = I_{E_n}(y)$ ν-п.в. Следовательно, существует такое множество Y_0 полной ν-меры, что $\mu^y\big(\pi^{-1}(E_n)\big) = I_{E_n}(y)$ для всех $y \in Y_0$ и всех n. Из этого следует, что

$$\mu^y\big(\pi^{-1}(E)\big) = I_E(y), \quad \forall\, y \in Y_0,\ E \in \mathcal{E}.$$

Действительно, при фиксированном $y \in Y_0$ обе части этого равенства являются мерами по E и совпадают на $\mathcal{E}_0$. В частности, получаем $\mu^y\big(\pi^{-1}(y)\big) = 1$ для всех $y \in Y_0$. Если имеется модификация $\widetilde{\pi}$ со свойствами, указанными в формулировке, то найдется множество $X_0 \in \mathcal{A}$ полной μ-меры, на котором π совпадает с $\widetilde{\pi}$ и является $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$-измеримым. Тогда $Y_0 := \pi(X_0) = \widetilde{\pi}(X_0) \in \mathcal{E}_\nu$. Для меры μ на X_0 существуют регулярные условные меры μ^y, $y \in Y_0$, на $\mathcal{A}_{X_0} = \mathcal{A} \cap X_0$, причем $\mu^y\big(X_0 \cap \pi^{-1}(y)\big) = 1$ для ν-п.в. $y \in Y_0$. Продолжим меры μ^y на $\mathcal{A}$, положив $\mu^y(X \backslash X_0) = 0$. Поскольку $X_0 \cap \pi^{-1}(y)$ входит в $\mathcal{A}$ и содержится в $\pi^{-1}(y)$, то последнее утверждение доказано. □

Приведем пример, когда регулярных условных мер нет даже для счетно-порожденных σ-алгебр. Таким образом, наличие компактного приближающего класса является существенным условием. Возьмем два дизъюнктных множества S_1 и S_2 в отрезке $[0, 1]$ так, что оба имеют внутреннюю меру 0, а внешнюю 1, причем $S_1 \cup S_2 = [0, 1]$ (см. задачу 1.4). В качестве $\mathcal{B}$ возьмем борелевскую σ-алгебру отрезка, а в качестве $\mathcal{A}$ возьмем σ-алгебру, порожденную $\mathcal{B}$ и множеством S_1. Ясно, что обе σ-алгебры — счетно-порожденные, причем всякое множество $A \in \mathcal{A}$ имеет вид

$$A = (B_1 \cap S_1) \cup (B_2 \cap S_2), \quad B_1, B_2 \in \mathcal{B}([0, 1]).$$

Пусть λ — мера Лебега на $[0, 1]$. Непосредственно проверяется, что формула $\mu(A) = \big(\lambda(B_1) + \lambda(B_2)\big)/2$ корректно задает меру на $\mathcal{A}$, совпадающую с λ на $\mathcal{B}$.

Пример 8.8. На $\mathcal{A}$ не существует регулярных условных мер относительно $\mathcal{B}$.

Доказательство. Ясно, что тождественное отображение из $([0, 1], \mathcal{A})$ в $([0, 1], \mathcal{B})$ измеримо. Образ меры μ при этом отображении есть λ. Из доказательства следствия 8.7 видно, что для λ-п.в. y регулярные условные меры должны быть дираковскими мерами в точках: $\mu^y(A) = \delta_y(A)$. В частности, $\mu^y(S_1) = \delta_y(S_1)$ для всех y вне некоторого множества Z лебеговской меры нуль. Очевидным образом это не совместимо с требованием λ-измеримости функции $\mu^y(S_1)$, которая равна 1 на множестве, отличающемся от неизмеримого множества S_1 лишь на множество лебеговской меры нуль. □

Теперь мы увидим, что не все естественные требования на условные меры, встречавшиеся выше, совместимы. Пусть μ — борелевская вероятностная мера на борелевском множестве X в полном сепарабельном метрическом пространстве и f — борелевская функция на X. Обозначим σ-алгебру, порожденную f, через $\sigma(f)$.

Предложение 8.9. *Существование регулярных условных вероятностных мер μ^y, $y \in \mathbb{R}^1$, которые при всех $y \in f(X)$ сосредоточены на множествах $f^{-1}(y)$ и для которых все функции $y \mapsto \mu^y(A)$, $A \in \mathcal{B}(X)$, являются борелевскими, равносильно тому, что найдется отображение $F\colon\ X \to X$, которое $\big(\sigma(f), \mathcal{B}(X)\big)$-измеримо и удовлетворяет условию $f\big(F(x)\big) = f(x)$.*

При этом необходимым условием существования отображения F является борелевость множества $f(X)$. Значит, существует непрерывная функция f из борелевского множества в $[0,1]$ в $[0,1]$, для которой нет условных мер со свойствами, упомянутыми выше, даже для меры Лебега.

Таким образом, в общем случае (причем даже не в слишком общем) надо либо отказаться от того, что все условные меры μ^y сидят на множествах $f^{-1}(y)$ и разрешить нарушение этого условия для точек y из множества $\mu \circ f^{-1}$-меры нуль, либо настаивать на этом условии, но тогда поступиться борелевостью функций $y \mapsto \mu^y(A)$ и довольствоваться их измеримостью относительно $\mu \circ f^{-1}$.

9 Пространства Лебега – Рохлина и измеримые разбиения Рохлина

Важный для приложений класс измеримых пространств был выделен нашим замечательным и весьма разносторонним математиком В.А. Рохлиным (воспоминания о нем см. в Избранных работах [5]), который назвал их пространствами Лебега. В этом параграфе рассматриваются только конечные неотрицательные меры.

Будем говорить, что пространство с мерой $(M, \mathcal{M}, \mu)$ обладает счетным базисом $\{B_n\}$, если множества $B_n \in \mathcal{M}$ разделяют точки M (т.е. для любых различных точек x и y существует такое B_n, что либо $x \in B_n$, $y \notin B_n$, либо $x \notin B_n$, $y \in B_n$), причем лебеговское пополнение $\sigma(\{B_n\})$ совпадает с пополнением $\mathcal{M}$ (т.е. $\sigma(\{B_n\})_\mu = \mathcal{M}_\mu$). Иначе говоря, всякое μ-измеримое множество заключено между двумя множествами из $\sigma(\{B_n\})$ равной меры.

Пространства с таким свойством будем называть *сепарабельными по Рохлину.* Сепарабельными по Рохлину являются те и только те измеримые пространства $(M, \mathcal{M}, \mu)$, для которых можно найти счетно-порожденную и счетно-разделяющую σ-алгебру $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ с $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{M}_\mu$.

Пусть $\Omega = \{0,1\}^\infty$ — множество всех последовательностей $\omega = (\omega_i)$, где ω_i есть 1 или 0. Для каждого $\omega \in \Omega$ положим

$$E_\omega = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n(\omega_n),$$

где $B_n(\omega_n) = B_n$, если $\omega_n = 1$, и $B_n(\omega_n) = M \backslash B_n$, если $\omega_n = 0$.

Если множества B_n разделяют точки M, то каждое из множеств E_ω содержит не более одной точки.

Пространство M называется полным относительно своего базиса $\{B_n\}$, если каждое E_ω непусто.

Таким образом, для полного пространства множество E_ω есть некоторая точка $x_\omega \in M$, причем всякая точка $x \in M$ совпадает с некоторым E_ω: в качестве $\omega = \omega(x)$ надо взять последовательность, для которой $\omega_n = 1$, если $x \in B_n$, и $\omega_n = 0$, если $x \notin B_n$. Формула $\psi\colon\ x \mapsto \omega(x)$ задает взаимно-однозначное отображение M на Ω. В частности, M имеет мощность континуума.

Пример 9.1. Наделим пространство Ω его естественной σ-алгеброй $\mathcal{B}$, порожденной цилиндрами $C_n = \{\omega \in \Omega\colon\ \omega_n = 1\}$ (т.е. $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Omega)$, если Ω рассматривать как топологическое произведение, что превращает Ω в компактное метрическое пространство). Тогда для всякой борелевской меры ν на Ω пространство $(\Omega, \mathcal{B}, \nu)$ полно относительно базиса $\{C_n\}$.

Доказательство. Неочевидна лишь непустота множеств E_ω. Поскольку дополнение к C_n состоит из всех последовательностей с нулевой n-компонентой, то точка x_ω указывается явным образом: ее n-компонента есть ω_n. □

Полнота относительно базиса означает, в частности, что все B_n пересекаются (причем если какие-то из них заменить на дополнения, то и такие множества будут иметь общую точку). Поэтому естественный базис меры Лебега на отрезке, составленный из интервалов с рациональными концами, этому условию не удовлетворяет. Вообще говоря, построение базиса, относительно которого пространство полно, — не очень простая задача, как мы сейчас увидим на примере меры Лебега. Поэтому ниже обсуждается существенно более широкое понятие полноты mod0.

Пример 9.2. Пусть M — множество всех точек из $[0,1]$, троичное разложение которых не содержит 2, и пусть B_n — множество всех точек из M, у которых на n-ой позиции в троичном разложении стоит 1. Тогда M с произвольной борелевской мерой полно относительно базиса $\{B_n\}$. При этом отображение $\omega \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n 3^{-n}$ задает изоморфизм $\{0,1\}^\infty$ и M.

Пример 9.3. Пространство $\big([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda\big)$, где λ — мера Лебега, обладает счетным базисом, относительно которого оно полно.

Доказательство. Точки отрезка $[0,1]$ будем записывать в двоичной системе $x = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n 2^{-n}$, где ω_n равно 1 или 0. За исключением точек некоторого счетного множества $S \subset [0,1]$ указанное разложение единственно. Таким образом, $X = [0,1] \backslash S$ находится во взаимно-однозначном соответствии с дополнением в $\Omega = \{0,1\}^\infty$ к счетному множеству S', состоящему из последовательностей, компоненты которых с некоторого номера равны только 0 или только 1. Между множествами S и S' также установим взаимно-однозначное соответствие. Пусть B_n — множество в $[0,1]$, соответствующее множеству C_n из примера 9.1 при полученном борелевском изоморфизме $[0,1]$ и Ω. Тем самым, если пренебречь счетным множеством S, то B_n — конечный набор двоично-рациональных промежутков в X, содержащих числа с единицей на n-ой позиции в двоичном разложении. Согласно примеру 9.1, базис $\{B_n\}$ обладает свойством полноты. □

Определение 9.4. *Пусть $(M, \mathcal{M}, \mu)$ — пространство с мерой и счетным базисом $\{B_n\}$. Будем говорить, что оно полно* mod0 *относительно базиса $\{B_n\}$, если найдутся измеримое пространство $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{\mu})$, полное относительно некоторого базиса $\{\widetilde{B_n}\}$, множество $M_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\widetilde{\mu}}$ полной $\widetilde{\mu}$-меры и взаимно-однозначное измеримое отображение $\pi\colon\ M \to M_0$, такие, что*

$$\pi(B_n) = \widetilde{B_n} \cap M_0 \quad \textit{и} \quad \mu \circ \pi^{-1} = \widetilde{\mu}.$$

Фактически требование полноты mod0 состоит в том, что данное пространство M может быть реализовано как подмножество полной меры в некотором пространстве $\widetilde{M}$ с базисом, относительно которого оно полно, причем пересечения элементов базиса с M дают заданный базис M. Отметим, что из условия $\pi(B_n) = \widetilde{B_n} \cap M_0$ следует $\big(\sigma(\{B_n\}), \sigma(\{\widetilde{B_n}\})\big)$-измеримость π.

Определение 9.5. *Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ — два измеримых пространства с неотрицательными мерами.*

(i) *Точечный изоморфизм T этих пространств есть такое взаимно-однозначное отображение X на Y, что выполнены равенства*

$$T(\mathcal{A}) = \mathcal{B} \quad \text{и} \quad \mu \circ T^{-1} = \nu.$$

(ii) *Пространства $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ называются изоморфными* mod0*, если существуют множества $N \in \mathcal{A}_\mu$, $N' \in \mathcal{B}_\nu$ с $\mu(N) = \nu(N') = 0$ и точечный изоморфизм T пространств $X \backslash N$ и $Y \backslash N'$, которые рассматриваются с ограниченными на них мерами μ и ν и σ-алгебрами $\mathcal{A}_\mu$ и $\mathcal{B}_\nu$.*

Определение 9.6. *Пространство с мерой $(M, \mathcal{M}, \mu)$ будем называть пространством Лебега–Рохлина, если оно изоморфно* mod0 *некоторому пространству с мерой $(M', \mathcal{M}', \mu')$ со счетным базисом, относительно которого M' полно.*

Ясно, что если пространство $(M, \mathcal{M}, \mu)$ полно mod0 относительно некоторого базиса, то оно есть пространство Лебега–Рохлина. В отличие от полноты, свойство полноты mod0 не зависит от выбора базиса.

Теорема 9.7. *Пусть $(M, \mathcal{M}, \mu)$ — пространство Лебега–Рохлина с вероятностной мерой μ. Тогда оно изоморфно* mod0 *отрезку $[0, 1]$ с мерой*

$$\nu = c\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_{1/n},$$

где $c = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, $\alpha_n = \mu(a_n)$ и $\{a_n\}$ — все атомы меры μ.

Теорема 9.8. *Если сепарабельное по Рохлину пространство $(M, \mathcal{M}, \mu)$ с мерой полно* mod0 *относительно некоторого базиса, то оно полно* mod0 *относительно всякого базиса.*

Разбиением пространства с мерой $(M, \mathcal{M}, \mu)$ называется представление M в виде объединения попарно непересекающихся измеримых множеств ζ_α, где индекс α пробегает некоторое непустое множество T. Положим $\zeta = (\zeta_\alpha)_{\alpha \in T}$. Основной пример — разбиение на прообразы точек для измеримой функции.

Будем называть ζ-множествами произвольные объединения элементов разбиения ζ. Например, если ζ — разбиение квадрата $[0, 1]^2$ на отрезки, параллельные оси ординат, то ζ-множества — это множества вида $A \times [0, 1]$, где $A \subset [0, 1]$.

Пусть дана счетная система измеримых множеств $S = (S_n)$. Рассмотрим множества

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(\omega_n),$$

соответствующие последовательностям $\omega = (\omega_n) \in \{0,1\}^\infty$, где $S_n(\omega_n) = S_n$ при $\omega_n = 1$ и $S_n(\omega_n) = M \backslash S_n$ при $\omega_n = 0$. Ясно, что полученные множества (из них учитываются лишь непустые) образуют разбиение, которое обозначается через $\zeta(S)$. Система S называется базисом разбиения.

Определение 9.9. *Разбиение ζ называется измеримым, если оно имеет вид $\zeta = \zeta(S)$ для некоторого не более чем счетного набора S измеримых множеств.*

Лемма 9.10. *Разбиение измеримо тогда и только тогда, когда оно имеет вид $\zeta = \bigl(f^{-1}(c)\bigr)_{c\in[0,1]}$ для некоторой измеримой функции $f\colon\ M \to [0,1]$.*

Доказательство. Разбиение на прообразы точек является измеримым, поскольку оно имеет базис $f^{-1}(I_n)$, где I_n — всевозможные интервалы с рациональными концами. Обратно, пусть $S = (S_n)$ — базис измеримого разбиения ζ. Отображение

$$g\colon\ M \to \{0,1\}^\infty, \quad g(x) = \bigl(I_{S_n}(x)\bigr)_{n=1}^\infty,$$

измеримо, если $\{0,1\}^\infty$ наделено своей стандартной борелевской σ-алгеброй. Ясно, что ζ совпадает с разбиением на прообразы точек для отображения g. Осталось взять инъективную борелевскую функцию $\varphi\colon\ \{0,1\}^\infty \to [0,1]$ и положить $f = \varphi \circ g$. □

Из доказанного ясно, что измеримым является и всякое разбиение на прообразы точек при измеримом отображении в пространство со счетно-порожденной и счетно-разделяющей σ-алгеброй. Поскольку элементы разбиения имеют вид $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}^1$, то из сказанного в § 8 ясно, что на них возникают регулярные условные меры.

Будем говорить, что разбиения ζ и ζ' тождественны mod0, если найдется такое множество M_0 полной μ-меры, что разбиения множества M_0, которые индуцируют ζ и ζ', равны.

На множестве разбиений есть естественный порядок: $\zeta \leqslant \zeta'$, если каждый элемент разбиения ζ целиком слагается из некоторого набора элементов разбиения ζ'. При этом ζ' называется более мелким (соответственно, ζ более крупным).

Для всякой последовательности измеримых разбиений ζ_n имеется самое крупное разбиение ζ, которое мельче каждого ζ_n. Это разбиение обозначается через $\bigvee_{n=1}^\infty \zeta_n$ и определяется как разбиение на прообразы точек при отображении $x \mapsto \bigl(f_n(x)\bigr)$ из M в $[0,1]^\infty$, где f_n порождают разбиения ζ_n согласно доказанной лемме, а $[0,1]^\infty$ наделяется естественной борелевской σ-алгеброй.

Пусть μ — вероятностная мера. Два измеримых разбиения ζ и η называются *независимыми*, если порождающие их функции f и g представляют собой независимые случайные величины на $(M, \mathcal{M}, \mu)$, т.е.

$$\mu\bigl(x\colon\ f(x) < a, g(x) < b\bigr) = \mu\bigl(x\colon\ f(x) < a\bigr)\mu\bigl(x\colon\ g(x) < b\bigr)$$

для всех $a, b \in \mathbb{R}^1$. В качестве задачи предлагается проверить, что это равносильно тому, что для всякого измеримого ζ-множества A и всякого измеримого η-множества B справедливо равенство

$$\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Два измеримых разбиения ζ и η называются *взаимно–дополнительными*, если $\zeta \bigvee \eta$ тождественно mod0 разбиению на точки. Таким образом, если ζ порождено функцией f, а η — функцией g, то требуется, чтобы отображение $(f,g)\colon\ M \to \mathbb{R}^2$ было инъективным на множестве полной меры.

Взаимно-дополнительные независимые разбиения называются *независимыми дополнениями* друг друга.

Теорема 9.11. *Предположим, что ζ — такое измеримое разбиение пространства Лебега–Рохлина $(M, \mathcal{M}, \mu)$, где μ — вероятностная мера, что почти все условные меры на элементах разбиения не имеют атомов. Тогда ζ обладает независимым дополнением.*

Доказательство. В терминах случайных величин нам надо доказать следующее. Есть измеримая функция $f\colon\ M \to [0,1]$, такая, что для $\mu \circ f^{-1}$-п.в. y условная мера μ^y на $f^{-1}(y)$ не имеет атомов. Тогда найдется такая измеримая функция $g\colon\ M \to [0,1]$, что отображение $(f,g)\colon\ M \to [0,1]^2$ инъективно на множестве полной меры и переводит μ в меру $\nu \otimes \nu_0$, где $\nu = \mu \circ f^{-1}$ и ν_0 — некоторая вероятностная мера. По теореме об изоморфизме можно считать, что μ — борелевская мера на $[0,1]$, а f — борелевская функция. Положим

$$g(x) = \mu^{f(x)}\big([0,x)\big).$$

Заметим, что функция $(x,t) \mapsto \mu^{f(x)}\big([0,t)\big)$ — борелевская. Это вытекает из задачи 9.12, поскольку функция $\mu^y\big([0,t)\big)$ является борелевской по y при фиксированном t и непрерывной слева по t при фиксированном y. Тогда g — борелевская функция. Отображение (f,g) инъективно на множестве Ω всех таких $x \in M$, что мера $\mu^{f(x)}$ не имеет атомов и $g(x) < g(x+n^{-1})$ при всех $n \in \mathbb{N}$, так как если $x_1, x_2 \in \Omega$ и $x_1 < x_2$, то либо $f(x_1) \neq f(x_2)$, либо $f(x_1) = f(x_2) = y$ и $g(x_1) < g(x_2)$, ибо $x_2 > x_1 + n^{-1}$ при некотором n. При этом $\mu(\Omega) = 1$, ибо Ω содержит пересечение Ω_0 множества $\{x\colon\ g(x) < g(x+n^{-1})\ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$ и множества $f^{-1}(E)$, где E — такое борелевское множество с $\nu(E) = 1$, что условные меры μ^y не имеют атомов. В самом деле, указанное пересечение μ-измеримо, причем $\mu^y(\Omega_0) = 1$ для всех $y \in E$, что ясно из следующего наблюдения: для всякой безатомической вероятностной борелевской меры σ на $[0,1]$ с функцией распределения F_σ при σ-п.в. t имеем $F_\sigma(t) < F_\sigma(t+n^{-1})$ для всех n (топологический носитель σ имеет вид $[0,1] \backslash \bigcup_{k=1}^\infty (a_k, b_k)$, поэтому указанным свойством обладают все $t \notin \bigcup_{k=1}^\infty [a_k, b_k]$). Покажем, что мера μ переводится отображением (f,g) в произведение меры ν и меры Лебега λ на $[0,1]$. Для этого достаточно показать, что для всяких $a<b$, $c<d$ справедливо равенство

$$\mu\big((f,g)^{-1}([a,b]\times[c,d])\big) = \nu([a,b])\lambda([c,d]).$$

Так как $\mu^y\big(f^{-1}(y)\big) = 1$, то левая часть этого равенства есть

$$\int_{[a,b]} \mu^y\Big((f,g)^{-1}([a,b]\times[c,d])\Big)\,\nu(dy) = \int_{[a,b]} \mu^y\Big(f^{-1}(y) \cap g^{-1}([c,d])\Big)\,\nu(dy).$$

На $f^{-1}(y)$ функция g равна функции распределения меры μ^y: $g(x) = \mu^y\big([0,x)\big)$ при $f(x) = y$. Так как $\mu^y\big(f^{-1}(y)\big) = 1$, то

$$\mu^y\big(f^{-1}(y) \cap g^{-1}([c,d])\big) = \lambda([c,d])$$

для $y \in E$, поскольку, как уже отмечалось, функция распределения меры μ на $[0,1]$, не имеющей атомов, переводит ее в меру Лебега. $\square$

Задача 9.12. *Пусть $(X, \mathcal{B})$ — некоторое измеримое пространство, а функция $f\colon\ X \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ удовлетворяет следующим условиям: при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^1$ функция $x \mapsto f(x,t)$ измерима относительно $\mathcal{B}$, а при каждом фиксированном $x \in X$ функция $t \mapsto f(x,t)$ непрерывна слева. Доказать, что функция f измерима относительно $\mathcal{B} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$.*

Список литературы

[1] Богачев В.И. Основы теории меры. Т. 1, 2. 2-е изд. РХД, Москва – Ижевск, 2006; 584 с., 680 с.

[2] Богачев В.И., Колесников А.В. Задача Монжа – Канторовича: достижения, связи и перспективы. Успехи матем. наук. 2012. Т. 67, N 5. С. 3–110.

[3] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 4-е изд. Наука, М., 1976; 544 с.

[4] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. ГТТИ, М.–Л., 1950; 399 с. (3-е изд.: Наука, М., 1974; 480 с.)

[5] Рохлин В.А. Об основных понятиях теории меры. Матем. сб. 1949. Т. 25. С. 107–150 (есть в Рохлин В.А. Избранные работы. МЦНМО, М., 2010).