

§1. Справочник по множествам и отображениям

1.1. Множества. Мы не будем заниматься основаниями теории множеств, полагаясь на школьное интуитивное представление о множестве как «абстрактной совокупности элементов произвольной природы». Элементы множества мы часто будем называть *точками*. Все точки в любом множестве, по определению, различны.

Множество X задано, как только про любой объект можно сказать, является он точкой множества X или нет. Принадлежность точки x множеству X записывается как $x \in X$. Два множества *равны*, если они состоят из одних и тех же элементов. Существует единственное множество, не содержащее ни одного элемента. Оно называется *пустым* и обозначается \emptyset . Если множество X конечно, то мы обозначаем через $|X|$ количество элементов в нём.

Множество X называется *подмножеством* множества Y , если каждый элемент $x \in X$ лежит также и в Y . В этом случае пишут $X \subset Y$. Отметим, что пустое множество является подмножеством любого множества и всякое множество является подмножеством самого себя. Непустые подмножества, отличные от всего множества, называются *собственными подмножествами*.

Упражнение 1.1. Сколько всего подмножеств (включая несобственные) имеется у множества, состоящего из n элементов?

Для любых двух множеств X и Y множество $X \cup Y$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из них, называется их *объединением*; множество $X \cap Y$, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно каждому из них, называется их *пересечением*; множество $X \setminus Y$, состоящее из всех элементов множества X , которые не содержатся в Y , называется их *разностью*.

Упражнение 1.2. Проверьте, что операция пересечения выражается через разность по формуле $X \cap Y = X \setminus (X \setminus Y)$. Можно ли выразить разность через пересечение и объединение?

Если множество X является объединением непересекающихся подмножеств Y и Z , то говорят, что X является *дизъюнктивным объединением* Y и Z и пишут $X = Y \sqcup Z$.

Множество $X \times Y$, элементами которого являются, по определению, всевозможные пары (x, y) с $x \in X$, $y \in Y$, называется *декартовым (или прямым) произведением* множеств X и Y .

1.2. Отображения. Отображение $f : X \rightarrow Y$ из множества X в множество Y — это правило, которое сопоставляет каждой точке $x \in X$ некоторую однозначно определяемую по x точку $y = f(x) \in Y$, которая называется *образом* точки x при отображении f .

Множество всех точек $x \in X$, образ которых равен данной точке $y \in Y$, называется *полным прообразом* точки y (или *слоем* отображения f над y) и обозначается

$$f^{-1}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid f(x) = y\}.$$

Полные прообразы различных точек не пересекаются и могут быть как пустыми, так и состоять из многих точек. Множество всех $y \in Y$, имеющих непустой прообраз, называется *образом отображения* $f : X \rightarrow Y$ и обозначается

$$\text{im}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \neq \emptyset\} = \{y \in Y \mid \exists x \in X : f(x) = y\}.$$

Два отображения $f : X \rightarrow Y$ и $g : X \rightarrow Y$ *равны*, если их значения в каждой точке одинаковы: $\forall x \in X \ f(x) = g(x)$. Множество всех отображений из множества X в множество Y обозначается $\text{Hom}(X, Y)$.

Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *наложением* (а также *сюръекцией* или *эпиморфизмом*), если $\text{im}(f) = Y$, т. е. когда прообраз каждой точки $y \in Y$ не пуст. Мы будем изображать сюръективные отображения стрелками $X \twoheadrightarrow Y$.

Отображение f называется *вложением* (а также *инъекцией*, или *мономорфизмом*), если $f(x_1) \neq f(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$, т. е. когда прообраз каждой точки $y \in Y$ содержит не более одного элемента. Инъективные отображения мы обозначает стрелками $X \hookrightarrow Y$.

Упражнение 1.3. Перечислите все отображения $\{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1\}$ и все отображения $\{0, 1\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$. Сколько среди них вложений и сколько наложений?

Отображение $f : X \rightarrow Y$, которое является одновременно и вложением и наложением, называется *взаимно однозначным* (а также *биекцией* или *изоморфизмом*). Иными словами, биективность отображения f означает, что для каждого $y \in Y$ существует единственный $x \in X$, такой что $f(x) = y$. Мы будем обозначать биекции стрелками $X \xrightarrow{\sim} Y$.

Упражнение 1.4. Какие из отображений: $\mathbb{N} \xrightarrow{x \mapsto x^2} \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \xrightarrow{x \mapsto x^2} \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \xrightarrow{x \mapsto 7x} \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \xrightarrow{x \mapsto 7x} \mathbb{Q}$ являются а) биекциями б) инъекциями в) сюръекциями?

Отображения $X \rightarrow X$ из множества X в себя обычно называют *эндоморфизмами* множества X . Множество всех эндоморфизмов обозначается $\text{End}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}(X, X)$.

Упражнение 1.5 (принцип Дирихле). Покажите, что следующие три условия на множество X попарно равносильны друг другу:

- X бесконечно
- \exists вложение $X \hookrightarrow X$, не являющееся наложением
- \exists наложение $X \twoheadrightarrow X$, не являющееся вложением.

Взаимно однозначные эндоморфизмы $X \xrightarrow{\sim} X$ называются *автоморфизмами* X и множество всех автоморфизмов обозначается через $\text{Aut}(X)$. Автоморфизмы можно воспринимать как *перестановки* элементов множества X . У всякого множества X имеется *тождественный эндоморфизм* $\text{Id}_X : X \rightarrow X$, который переводит каждый элемент в самого себя: $\forall x \in X \ \text{Id}_X(x) = x$.

Упражнение 1.6. Счётно ли множество $\text{Aut}(\mathbb{N})$?

Пример 1.1 (запись отображений словами)

Рассмотрим множества $X = \{1, 2, \dots, n\}$ и $Y = \{1, 2, \dots, m\}$, сопоставим каждому отображению $f : X \rightarrow Y$ последовательность его значений:

$$w(f) \stackrel{\text{def}}{=} (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) \quad (1-1)$$

и будем воспринимать её как n -буквенное слово, написанное при помощи m -буквенного алфавита Y . Так, отображениям $f : \{1, 2\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ и $g : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$, действующим по правилам $f(1) = 3, f(2) = 2$ и $g(1) = 1, g(2) = 2, g(3) = 2$, сопоставятся слова $w(f) = (3, 2)$ и $w(g) = (1, 2, 2)$, составленные из букв алфавита $\{1, 2, 3\}$.

Запись отображения словом задаёт биекцию

$$w : \text{Hom}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \{\text{слова из } |X| \text{ букв в алфавите } Y\}, \quad f \mapsto w(f). \quad (1-2)$$

Инъективные отображения записываются при этом словами, в которых нет повторяющихся букв, а сюръективные отображения — словами, в которых используются все без исключения буквы алфавита Y . Взаимно однозначным отображениям отвечают слова, в которых задействованы все буквы алфавита Y , причём каждая — ровно по одному разу.

1.3. Разбиения. Задать отображение $f : X \rightarrow Y$ это то же самое, что представить X в виде дизъюнктного объединения непустых подмножеств $f^{-1}(y)$, занумерованных точками $y \in \text{im}(f)$:

$$X = \bigsqcup_{y \in \text{im}(f)} f^{-1}(y). \quad (1-3)$$

Такой взгляд на отображения часто оказывается полезным при подсчёте числа элементов в том или ином множестве.

Скажем, когда все непустые слои отображения $f : X \rightarrow Y$ состоят из одного и того же числа точек $m = |f^{-1}(y)|$, число элементов в образе отображения f связано с числом элементов в множестве X формулой

$$|X| = m \cdot |\text{im } f|, \quad (1-4)$$

которая при всей своей банальности имеет множество применений.

Предложение 1.1

Если $|X| = n$ и $|Y| = m$, то $|\text{Hom}(X, Y)| = m^n$.

Доказательство. Зафиксируем какую-нибудь точку $x \in X$ и рассмотрим *отображение вычисления*¹, сопоставляющее отображению $f : X \rightarrow Y$ его значение в точке x :

$$\text{ev}_x : \text{Hom}(X, Y) \rightarrow Y, \quad f \mapsto f(x). \quad (1-5)$$

Прообраз $\text{ev}_x^{-1}(y)$ любой точки $y \in Y$ можно отождествить с множеством всех отображений из $(n - 1)$ -элементного множества $X \setminus \{x\}$ в Y :

$$\text{ev}_x^{-1}(y) = \{f : X \rightarrow Y \mid f(x) = y\} = \text{Hom}(X \setminus \{x\}, Y).$$

Так как $\text{im } \text{ev}_x = Y$ по формуле (1-4) получаем $|\text{Hom}(X, Y)| = |\text{Hom}(X \setminus \{x\}, Y)| \cdot |Y|$, т. е. при добавлению к множеству X одной точки, количество отображений из X в Y увеличивается в $|Y|$ раз. Отсюда $|\text{Hom}(X, Y)| = |Y|^{|X|}$. \square

Замечание 1.1. Множество отображений $\text{Hom}(X, Y)$ часто обозначают через Y^X , и предыдущее рассуждение объясняет это обозначение.

Замечание 1.2. В [предл. 1.1](#) мы молчаливо предполагали, что $m, n > 0$, т. е. что оба множества X, Y непусты. Если $X = \emptyset$, то удобно считать, что $\text{Hom}(\emptyset, Y)$ для любого множества Y состоит ровно из одного элемента, «вкладывающего» \emptyset в качестве подмножества в Y , ибо формально $\emptyset \subset Y$. И хотя отображения вычисления (1-5) в этом случае не определены, утверждение [предл. 1.1](#) формально верно: $1 = m^0$. Если $Y = \emptyset$, то $\text{Hom}(X, \emptyset) = \emptyset$ для любого $X \neq \emptyset$, а $\text{Hom}(\emptyset, \emptyset) = \{Id_\emptyset\}$. Первое также формально согласуется с [предл. 1.1](#): $0^n = 0$. Последнее указывает на то, что 0^0 имеет смысл считать равным 1.

¹обозначение «ev» является сокращением слова *evaluation*

Предложение 1.2

Если $|X| = n$, то $|\text{Aut}(X)| = n!$.

Доказательство. Положим $Y = X$ в доказательстве [предл. 1.1](#) и ограничим отображение вычисления (1-5) на подмножество биекций $\text{Aut}(X) \subset \text{Hom}(X, X)$. Получим отображение

$$\text{ev}_x : \text{Aut}(X) \rightarrow X, \quad f \mapsto f(x).$$

Его слой $\text{ev}_x^{-1}(x')$ над произвольной точкой $x' \in X$ состоит из всех биекций $X \simeq X$, переводящих x в x' . Беря композицию такой биекции с автоморфизмом $X \simeq X$, который переставляет между собой x и x' , оставляя все остальные точки на месте, мы получаем взаимно однозначное отображение из $\text{ev}_x^{-1}(x')$ в множество автоморфизмов $(n-1)$ -элементного множества $X \setminus \{x\}$. Поэтому все слои $\text{ev}_x^{-1}(x')$ непусты и состоят из одного и того же числа элементов. По формуле (1-4) $|\text{Aut}(X)| = |\text{Aut}(X \setminus \{x\})| \cdot |X|$, т. е. при добавлении n -той точки к $(n-1)$ -элементному множеству количество его автоморфизмов увеличивается в n раз. Откуда $|\text{Aut}(X)| = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$. \square

Замечание 1.3. Так как $|\text{Aut}(\emptyset)| = |\{Id_\emptyset\}| = 1$, мы по определению полагаем $0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

Пример 1.2 (мультиномиальные коэффициенты)

При раскрытии скобок в выражении $(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n$ получится сумма одночленов вида $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$, где каждый показатель k_i заключен в пределах $0 \leq k_i \leq n$, а общая степень $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Коэффициент, возникающий при таком одночлене после приведения подобных слагаемых, называется *мультиномиальным коэффициентом* и обозначается $\binom{n}{k_1 \dots k_m}$. Таким образом,

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_m=n \\ \forall i \ 0 \leq k_i \leq n}} \binom{n}{k_1 \dots k_m} \cdot a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}, \quad (1-6)$$

Чтобы явно выразить $\binom{n}{k_1 \dots k_m}$ через k_1, k_2, \dots, k_m , заметим, что раскрытие n скобок

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)(a_1 + a_2 + \dots + a_m) \dots (a_1 + a_2 + \dots + a_m)$$

заключается в последовательном выборе внутри каждой из скобок какой-нибудь одной буквы и выписывании их слева направо друг за другом в одно n -буквенное слово. Это надо сделать всеми возможными способами и сложить все полученные слова. Подобные слагаемые, вносящие вклад в коэффициент при $a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$ суть слова, состоящие ровно из k_1 букв a_1 , k_2 букв a_2 , \dots , k_m букв a_m . Количество таких слов легко подсчитать по формуле (1-4).

А именно, сделаем на время k_1 букв a_1 попарно разными, снабдив каждую из них дополнительным верхним индексом; аналогично поступим с k_2 буквами a_2 , k_3 буквами a_3 и т. д. В результате получится набор из $n = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ попарно различных букв:

$$\underbrace{a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \dots, a_1^{(k_1)}}_{k_1 \text{ меченых букв } a_1}, \underbrace{a_2^{(1)}, a_2^{(2)}, \dots, a_2^{(k_2)}}_{k_2 \text{ меченых букв } a_2}, \dots \dots \dots, \underbrace{a_m^{(1)}, a_m^{(2)}, \dots, a_m^{(k_m)}}_{k_m \text{ меченых букв } a_m}.$$

Обозначим через X множество всех n -буквенных слов, которые можно написать этими n различными буквами, используя каждую букву ровно по одному разу. Как мы уже знаем, $|X| = n!$. В качестве Y возьмём интересующее нас множество слов из k_1 одинаковых букв a_1 , k_2 одинаковых букв a_2 , и т. д. и рассмотрим отображение $f : X \rightarrow Y$, стирающее верхние индексы у всех букв. Оно эпиморфно, и полный прообраз каждого слова $y \in Y$ состоит из $k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!$ слов, которые получаются из y всевозможными расстановками k_1 верхних индексов у букв a_1 , k_2 верхних индексов у букв a_2 , и т. д. По формуле (1-4)

$$\binom{n}{k_1 \dots k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}. \quad (1-7)$$

Тем самым, разложение (1-6) имеет вид

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = n \\ \forall i \ 0 \leq k_i \leq n}} \frac{n! \cdot a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}. \quad (1-8)$$

Упражнение 1.7. Сколько всего слагаемых в правой части формулы (1-8)?

В частности, при $m = 2$ мы получаем известную формулу для раскрытия бинома с натуральным показателем¹:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n! \cdot a^k b^{n-k}}{k! (n-k)!}. \quad (1-9)$$

При $m = 2$ мультиномиальный коэффициент

$$\binom{n}{k, n-k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1}$$

(и в числителе и в знаменателе стоят по k последовательно убывающих сомножителей) обозначается через $\binom{n}{k}$ или C_n^k и называется k -тым биномиальным коэффициентом степени n или числом сочетаний из n по k .

Пример 1.3 (диаграммы Юнга)

Разбиение конечного множества $X = \{1, 2, \dots, n\}$ в объединение непересекающихся подмножеств

$$X = X_1 \sqcup X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_k. \quad (1-10)$$

часто бывает удобно кодировать следующим образом. Занумеруем подмножества в порядке нестрогого убывания их размера и обозначим количество элементов в i -том подмножестве через $\lambda_i = |X_i|$. Получим невозрастающую последовательность чисел

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k,$$

которая называется *формой разбиения* (1-10). Форму разбиения удобно представлять себе в виде *диаграммы Юнга* — картинки вида

$$\begin{array}{cccccc} \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{array}, \quad (1-11)$$

¹Это частный случай *формулы Ньютона*, которую в полной общности мы обсудим в ??, когда будем заниматься степенными рядами

составленной из выровненных по левому краю горизонтальных клетчатых полос, в i -той полосе λ_i клеток. Общее число клеток в диаграмме λ называется *весом* диаграммы и обозначается $|\lambda|$, а число строк называется *длиной* и обозначается $\ell(\lambda)$.

Так, диаграмма Юнга (1-11) отвечает разбиению формы $\lambda = (6, 5, 5, 3, 1)$ и имеет вес $|\lambda| = 20$ и длину $\ell(\lambda) = 5$.

Упражнение 1.8. Подсчитайте количество всех диаграмм Юнга, уместяющихся в прямоугольнике размером $k \times n$ клеток (включая пустую диаграмму и сам прямоугольник).

Будем называть *заполнением* диаграммы λ множеством X из $|X| = |\lambda|$ элементов произвольную расстановку этих элементов в клетки диаграммы по одному элементу в каждую клетку. Таким образом, всего имеется $n!$ различных заполнений диаграммы λ множеством X .

Объединяя элементы, стоящие в i -той строке диаграммы в одно подмножество X_i , мы получаем разбиение множества X в дизъюнктное объединение k непересекающихся подмножеств X_1, X_2, \dots, X_k . Ясно, что любое разбиение (1-10) можно получить таким образом, так что мы получаем сюръективное отображение из множества заполнений диаграммы λ в множество разбиений множества X формы λ . Покажем, что все слои этого отображения состоят из одного и того же числа элементов.

Два заполнения приводят к одинаковым разбиениям тогда и только тогда, когда они получаются друг из друга перестановками элементов внутри строк и перестановками строк одинаковой длины между собою как единого целого. Если обозначить через m_i число строк длины i в диаграмме λ , то перестановок первого типа будет $\prod \lambda_i! = \prod_{i=1}^n (i!)^{m_i}$

штук, а второго типа — $\prod_{i=1}^n m_i!$ штук. Так как все эти перестановки действуют независимо

друг от друга, каждый слой нашего отображения состоит из $\prod_{i=1}^n (i!)^{m_i} m_i!$ элементов. Из формулы (1-4) вытекает

Предложение 1.3

Число разбиений n -элементного множества X в дизъюнктное объединение m_1 1-элементных, m_2 2-элементных, \dots , m_n n -элементных подмножеств равно

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^n m_i! \cdot (i!)^{m_i}}. \quad (1-12)$$

□

1.4. Классы эквивалентности. Альтернативный способ разбить заданное множество X в дизъюнктное объединение подмножеств состоит в том, чтобы объявить элементы, входящие в одно подмножество такого разбиения «эквивалентными». Формализуется это так. Назовём *бинарным отношением* на множестве X произвольное подмножество $R \subset X \times X = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in X\}$. Принадлежность пары (x_1, x_2) отношению R обычно записывают как $x_1 \sim_R x_2$.

¹отметим, что многие $m_i = 0$, поскольку $|\lambda| = n = m_1 + 2m_2 + \dots + nm_n$

Например, на множестве целых чисел $X = \mathbb{Z}$ имеются бинарные отношения

$$\text{равенство} \quad x_1 \sim_R x_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} x_1 = x_2 \quad (1-13)$$

$$\text{неравенство} \quad x_1 \sim_R x_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} x_1 \leq x_2 \quad (1-14)$$

$$\text{делимость} \quad x_1 \sim_R x_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} x_1 | x_2 \quad (1-15)$$

$$\text{сравнимость по модулю } n \quad x_1 \sim_R x_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} x_1 \equiv x_2 \pmod{n} \quad (1-16)$$

(последнее условие $x_1 \equiv x_2 \pmod{n}$ читается как « x_1 сравнимо с x_2 по модулю n » и по определению означает, что x_1 и x_2 имеют одинаковые остатки от деления на n).

Определение 1.1

Бинарное отношение \sim_R называется *эквивалентностью*, если оно обладает следующими тремя свойствами:

$$\text{рефлексивность} : \quad \forall x \in X \quad x \sim_R x$$

$$\text{транзитивность} : \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in X \text{ из } x_1 \sim_R x_2 \text{ и } x_2 \sim_R x_3 \text{ вытекает } x_1 \sim_R x_3$$

$$\text{симметричность} : \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 \sim_R x_2 \iff x_2 \sim_R x_1.$$

Среди перечисленных выше бинарных отношений на множестве \mathbb{Z} отношения (1-13) и (1-16) являются эквивалентностями, а (1-14) и (1-15) не являются (они несимметричны).

Если множество X разбито в объединение непересекающихся подмножеств, то отношение $x_1 \sim x_2$, означающее, что x_1 и x_2 лежат в одном и том же подмножестве этого разбиения, очевидно, является эквивалентностью.

Наоборот, пусть на множестве X задано какое-нибудь отношение эквивалентности R . Рассмотрим для каждого $x \in X$ подмножество в X , состоящее из всех элементов, эквивалентных x . Оно называется *классом эквивалентности* элемента x и обозначается

$$[x]_R = \{z \in X \mid x \sim_R z\} = \{z \in X \mid z \sim_R x\}$$

(второе равенство выполняется благодаря симметричности отношения R). Два класса $[x]_R$ и $[y]_R$ либо вообще не пересекаются, либо полностью совпадают. В самом деле, если существует элемент z , эквивалентный и x и y , то в силу симметричности и транзитивности отношения \sim_R элементы x и y будут эквивалентны между собой, а значит, любой элемент, эквивалентный x , будет эквивалентен также и y , и наоборот. Таким образом, множество X распадается в дизъюнктивное объединение различных классов эквивалентности.

Множество классов эквивалентности по отношению $R \subset X \times X$ обозначается X/R и называется *фактором* множества X по отношению R . Сюръективное отображение

$$f : X \twoheadrightarrow X/R, \quad x \mapsto [x], \quad (1-17)$$

сопоставляющее каждому элементу $x \in X$ его класс эквивалентности $[x] \in X/R$, называется *отображением факторизации*. Слои этого отображения суть классы эквивалентных элементов. Наоборот, любое сюръективное отображение $f : X \twoheadrightarrow Y$ является отображением факторизации по отношению эквивалентности $x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$.

Пример 1.4 (классы вычетов)

Фиксируем ненулевое целое число $n \in \mathbb{Z}$. Фактор множества целых чисел \mathbb{Z} по отношению сравнимости по модулю n из (1-16) обозначается $\mathbb{Z}/(n)$. Мы будем записывать его элементы символами $[z]_n$, где $z \in \mathbb{Z}$, и опускать индекс n , когда понятно чему он равен. Класс эквивалентности

$$[z]_n \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{Z} \mid (z - x) : n\} \quad (1-18)$$

называется *классом вычетов по модулю n* . Отображение факторизации

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/(n), \quad z \mapsto [z]_n$$

называется *приведением по модулю n* . Множество $\mathbb{Z}/(n)$ состоит из n различных классов

$$[0]_n, [1]_n, \dots, [n-1]_n.$$

При желании их можно воспринимать как остатки от деления на n , но в практических вычислениях удобнее работать с ними именно как с *подмножествами* в \mathbb{Z} , поскольку возможность по-разному записывать один и тот же класс часто упрощает вычисления. Например, остаток от деления 12^{100} на 13 можно искать как

$$[12^{100}]_{13} = [12]_{13}^{100} = [-1]_{13}^{100} = [(-1)^{100}]_{13} = [1]_{13}. \quad (1-19)$$

Упражнение 1.9. Докажите правомочность этого вычисления: проверьте, что классы вычетов $[x+y]_n$ и $[xy]_n$ не зависят от выбора чисел $x \in [x]_n$ и $y \in [y]_n$, т. е. правила

$$[x]_n + [y]_n \stackrel{\text{def}}{=} [x+y]_n \quad (1-20)$$

$$[x]_n \cdot [y]_n \stackrel{\text{def}}{=} [xy]_n \quad (1-21)$$

корректно определяют на множестве $\mathbb{Z}/(n)$ операции сложения и умножения¹.

1.4.1. Неявное задание эквивалентности. Для любого семейства отношений эквивалентности $R_\nu \subset X \times X$ пересечение $\bigcap_\nu R_\nu \subset X \times X$ также является отношением эквивалентности. В самом деле, если каждое из множеств $R_\nu \subset X \times X$ содержит диагональ

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X,$$

переходит в себя при симметрии $(x, y) \Leftrightarrow (y, x)$ и вместе с каждой парой точек вида (x, y) , (y, z) содержит также и точку (x, z) , то этими свойствами обладает и пересечение $\bigcap_\nu R_\nu$ всех этих множеств. Поэтому для любого подмножества $R \subset X \times X$ существует *наименьшее по включению* отношение эквивалентности \bar{R} , содержащее R — пересечение всех содержащих R отношений эквивалентности. Отношение \bar{R} называется эквивалентностью, *порождённой* отношением R . К сожалению, по данному множеству R не всегда легко судить о том, как устроена порождённая им эквивалентность \bar{R} . Даже выяснить, не окажутся ли в результате все точки эквивалентными друг другу², часто бывает не просто.

¹именно такое умножение $[12]^{100} = \underbrace{[12] \cdot [12] \cdot \dots \cdot [12]}_{100} = [12^{100}]$ и использовано в (1-19)

²т. е. существует ли хоть одна собственная (отличная от всего произведения $X \times X$) эквивалентность, содержащая R

Пример 1.5 (дроби)

Множество рациональных чисел \mathbb{Q} обычно определяют как множество дробей a/b с $a, b \in \mathbb{Z}$ и $b \neq 0$. При этом под *дробью* понимается класс эквивалентности упорядоченных пар $(a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus 0)$ по минимальному отношению эквивалентности, содержащему все отождествления

$$(a, b) \sim (ac, bc) \quad \forall c \neq 0. \quad (1-22)$$

Отношения (1-22) выражают собою равенства дробей $a/b = ac/bc$, но сами по себе не образуют эквивалентности. Например, при $a_1 b_2 = a_2 b_1$ в двухшаговой цепочке отождествлений (1-22)

$$(a_1, b_1) \sim (a_1 b_2, b_1 b_2) = (a_2 b_1, b_1 b_2) \sim (a_2, b_2)$$

самый левый и самый правый элементы может оказаться нельзя отождествить напрямую по правилу (1-22). Но эквивалентность, порождённая отождествлениями (1-22), обязана содержать все отождествления

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \quad \text{при} \quad a_1 b_2 = a_2 b_1. \quad (1-23)$$

Оказывается, что к этим отождествлениям уже больше ничего добавлять не надо.

Упражнение 1.10. Проверьте, что набор отношений (1-23) рефлексивен, симметричен и транзитивен (и, тем самым, полностью описывает минимальное отношение эквивалентности, содержащее все отождествления (1-22)).

1.5. Композиции отображений. Отображение $X \rightarrow Z$, получающееся в результате последовательного выполнения двух отображений $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ называется *композицией* отображений g и f и обозначается $g \circ f$ или просто gf . Таким образом,

$$\forall x \in X \quad gf(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(x)).$$

Композиция gf определена только тогда, когда образ f содержится в множестве, на котором определено отображение g .

Композицию трёх отображений $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T$ можно вычислять двумя способами: как $(hg)f$ или как $h(gf)$. В обоих случаях получится отображение, переводящее точку $x \in X$ в точку $h(g(f(x))) \in T$. Это означает, что композиция отображений *ассоциативна*¹: $(hg)f = h(gf)$ всякий раз, когда написанные композиции определены.

Предостережение 1.1. Хотя мы и обозначаем композицию отображений точно так же, как произведение, обращаться с формулами, включающими в себя композиции, надо с осторожностью: некоторые привычные по опыту работы с числами преобразования недопустимы при работе с композициями отображений. Так, умножение чисел *коммутативно*²: $fg = gf$, а композиция отображений, как правило, *нет*³.

¹т. е. подчиняется *сочетательному закону* — не зависит от расстановки скобок

²т. е. удовлетворяет *переместительному закону* — перестановка сомножителей в произведении не влияет на результат

³хотя бы потому, что одна из частей этого равенства может быть определена, а другая — нет

Упражнение 1.11. Рассмотрим на плоскости пару различных прямых ℓ_1, ℓ_2 , пересекающихся в точке O , и обозначим через σ_1 и σ_2 осевые симметрии относительно этих прямых. Явно опишите движения плоскости, задаваемые композициями $\sigma_1\sigma_2$ и $\sigma_2\sigma_1$. При каком условии на прямые выполняется равенство $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$?

Чтобы почувствовать отличие алгебраических свойств композиции от свойств умножения чисел, поучительно взглянуть на «таблицу умножения» отображений из двухэлементного множества $X = \{1, 2\}$ в себя.

Есть ровно четыре таких отображения, причём все композиции между ними определены. Если обозначать отображение $f \in \text{End}(X)$ двухбуквенным словом $(f(1), f(2))$, как в [прим. 1.1](#), то эти четыре эндоморфизма запишутся словами

$$(1, 1), (1, 2) = \text{Id}_X, (2, 1), (2, 2).$$

Значения композиций gf представлены в таблице:

$g \setminus f$	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)	
(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1-24)
(1, 2)	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)	
(2, 1)	(2, 2)	(2, 1)	(1, 2)	(1, 1)	
(2, 2)	(2, 2)	(2, 2)	(2, 2)	(2, 2)	

Обратите внимание на то, что $(2, 2) \circ (1, 1) \neq (1, 1) \circ (2, 2)$, а также на то, что в верхней и нижней строках все произведения одинаковы, но «сократить общий множитель» при этом нельзя, т. е. из равенства $fg_1 = fg_2$, вообще говоря, не следует равенство $g_1 = g_2$, как не следует оно и из равенства $g_1f = g_2f$.

Упражнение 1.12 (левые обратные отображения). Покажите, что следующие три условия на отображение $f : X \rightarrow Y$ эквивалентны:

- а) f инъективно
- б) $\exists g : Y \rightarrow X$ такое что $gf = \text{Id}_X$ (такое g называется *левым обратным* к f)
- в) \forall отображений $g_1, g_2 : Z \rightarrow X$ из $fg_1 = fg_2$ вытекает $g_1 = g_2$
и выясните, сколько левых обратных отображений имеется у заданного вложения n -элементного множества в m -элементное.

Упражнение 1.13 (правые обратные отображения). Покажите, что следующие три условия на отображение $f : X \rightarrow Y$ эквивалентны:

- а) f сюръективно
- б) $\exists g : Y \rightarrow X$ такое что $fg = \text{Id}_Y$ (такое g называется *правым обратным* к f)
- в) \forall отображений $g_1, g_2 : Z \rightarrow X$ из $g_1f = g_2f$ вытекает $g_1 = g_2$
и выясните, сколько правых обратных отображений имеется у заданного наложения m -элементного множества на n -элементное.

1.5.1. Обратимые отображения. Если отображение $g : X \rightarrow Y$ биективно, то прообраз $g^{-1}(y) \subset X$ каждой точки $y \in Y$ состоит ровно из одной точки. В этом случае правило $y \mapsto g^{-1}(y)$ определяет отображение $g^{-1} : Y \rightarrow X$, которое одновременно является и левым и правым обратным к g в смысле [упр. 1.12](#) и [упр. 1.13](#):

$$g \circ g^{-1} = \text{Id}_Y \quad \text{и} \quad g^{-1} \circ g = \text{Id}_X,$$

Отображение g^{-1} называется *двусторонним обратным* к g .

Предложение 1.4

Следующие условия на отображение $g : X \rightarrow Y$ попарно эквивалентны:

- (1) g взаимно однозначно
- (2) существует такое отображение $g' : Y \rightarrow X$, что $g \circ g' = \text{Id}_Y$ и $g' \circ g = \text{Id}_X$
- (3) g обладает левым и правым обратными отображениями¹.

При выполнении этих условий любое отображение g' из (2) и любые левые и правые обратные к g отображения из (3) совпадают друг с другом и с отображением g^{-1} описанным выше.

Доказательство. Импликация (1) \Rightarrow (2) уже была установлена. Импликация (2) \Rightarrow (3) очевидна. Докажем, что (3) \Rightarrow (2). Если у отображения $g : X \rightarrow Y$ есть левое обратное $f : Y \rightarrow X$ и правое обратное $h : Y \rightarrow X$, то $f = f \circ \text{Id}_Y = f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = \text{Id}_X \circ h = h$ и условие (2) выполняется для $g' = f = h$.

Остаётся показать, что (2) \Rightarrow (1) и доказать равенство $g' = g^{-1}$. Поскольку $g(g'(y)) = y$ для любого $y \in Y$, прообраз $g^{-1}(y)$ каждой точки $y \in Y$ содержит точку $g'(y)$. С другой стороны, для любого $x \in g^{-1}(y)$ выполнено равенство $x = \text{Id}_X(x) = g'(g(x)) = g'(y)$. Поэтому $f^{-1}(y)$ состоит из единственной точки $g'(y)$, т. е. g — биекция, и $g' = g^{-1}$. \square

1.6. Группы преобразований. Непустой набор G взаимно однозначных отображений множества X в себя называется *группой преобразований* множества X , если вместе с каждым отображением $g \in G$ в G лежит и обратное к нему отображение g^{-1} , а вместе с каждым двумя отображениями $f, g \in G$ в G лежит и их композиция fg . Эти условия гарантируют, что тождественное преобразование Id_X тоже лежит в G , поскольку $\text{Id}_X = g^{-1}g$ для любого $g \in G$.

Если группа преобразований G конечна, число элементов в ней обозначается $|G|$ и называется *порядком* группы G .

Если подмножество $H \subset G$ тоже является группой, то H называется *подгруппой* группы G .

Пример 1.6 (группы перестановок)

Множество $\text{Aut}(X)$ всех взаимно однозначных отображений $X \rightarrow X$ является группой. Эта группа называется *симметрической группой* (или *группой перестановок*) множества X . Все прочие группы преобразований множества X являются подгруппами этой группы.

Группа перестановок n -элементного множества $\{1, 2, \dots, n\}$ обозначается S_n и называется n -той *симметрической группой*. Согласно [предл. 1.2](#) $|S_n| = n!$.

Перестановку $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ мы будем записывать строчкой

$$(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

её значений $\sigma_i = \sigma(i)$, как в [прим. 1.1](#). Например, перестановки $\sigma = (3, 4, 2, 1)$ и $\tau = (2, 3, 4, 1)$ это отображения

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array}$$

¹обратите внимание, что совпадения левого обратного отображения с правым обратным отображением не требуется

а их композиции записываются как $\sigma\tau = (4, 2, 1, 3)$ и $\tau\sigma = (4, 1, 3, 2)$.

Упражнение 1.14. Составьте таблицу умножения шести элементов группы S_3 , аналогичную таблице (1-24) на стр. 12.

1.6.1. Абелевы группы. Группа G , в которой любые два элемента $f, g \in G$ перестановочны, т. е. удовлетворяют соотношению $fg = gf$, называется *коммутативной* или *абелевой*. Примерами абелевых групп являются группы параллельных переносов плоскости или пространства, а также группа SO_2 поворотов плоскости вокруг фиксированной точки. Для каждого натурального $n \geq 2$ повороты на углы, кратные $2\pi/n$, образуют в группе SO_2 конечную подгруппу. Она называется *циклической группой порядка n* .

Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.1. Ответ: 2^n .

Упр. 1.2. Ответ на второй вопрос: нет. Решение: пусть $X = \{1, 2\}$, $Y = \{2\}$; тогда все возможные значения пересечений и объединений между ними суть

$$\begin{aligned} X \cap Y &= Y \cap X = Y \cap Y = Y \cup X = Y \\ X \cup Y &= Y \cup X = X \cap X = X \cup X = X \end{aligned}$$

и любая формула, составленная из X, Y, \cap и \cup , даст на выходе либо $X = \{1, 2\}$, либо $Y = \{2\}$, тогда как $X \setminus Y = \{1\}$.

Упр. 1.3. В первом случае имеется 6 наложений и ни одного вложения, во втором — 6 вложений и ни одного наложения.

Упр. 1.5. Если множество X конечно, всякое отображение $X \rightarrow X$, которое инъективно или сюръективно, автоматически биективно. Если множество X бесконечно, то оно содержит подмножество, изоморфное \mathbb{N} , а у \mathbb{N} есть инъективные небиективные эндоморфизмы (например, $n \mapsto (n + 1)$) и сюръективные небиективные эндоморфизмы (например, $1 \mapsto 1$ и $n \mapsto (n - 1)$ при $n \geq 2$), и их можно продолжить до эндоморфизмов $X \rightarrow X$ тождественным действием на $X \setminus \mathbb{N}$.

Упр. 1.6. Ответ: нет. Воспользуйтесь рассуждением Кантора: предположите, что все биекции $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ можно занумеровать натуральными числами, и, пользуясь этим списком, постройте биекцию, которая при каждом $k = 1, 2, 3, \dots$ отображает число $k \in \mathbb{N}$ не туда, куда его отображает k -тая биекция из списка.

Упр. 1.7. Ответ: $\binom{n+m-1}{m-1} = \binom{n+m-1}{n} = \frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}$. Указание: слагаемых столько же, сколько имеется упорядоченных наборов неотрицательных целых чисел (k_1, k_2, \dots, k_m) с суммой $\sum k_i = n$. Такой набор можно закодировать словом, составленным из $(m - 1)$ букв 0 и n букв 1: сначала пишем k_1 единиц, потом нуль, потом k_2 единиц, потом нуль, и т. д. (слово кончится k_m единицами, стоящими следом за последним, $(m - 1)$ -м нулём).

Упр. 1.8. Ответ: $\binom{n+k}{k}$. Каждая такая диаграмма представляет собою ломаную, ведущую из левого нижнего угла прямоугольника в правый верхний. В такой ломаной ровно n горизонтальных звеньев и ровно k вертикальных.

Упр. 1.9. Пусть $[x']_n = [x]_n$ и $[y']_n = [y]_n$, т. е. $x' = x + nk$, $y' = y + n\ell$ с некоторыми $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Тогда $x' + y' = x + y + n(k + \ell)$ и $x'y' = xy + n(\ell x + ky + k\ell n)$ сравнимы по модулю n с $x + y$ и xy соответственно, т. е. $[x' + y']_n = [x + y]_n$ и $[x'y']_n = [xy]_n$.

Упр. 1.10. Рефлексивность и симметричность очевидны. Транзитивность: если $(p, q) \sim (r, s)$ и $(r, s) \sim (u, w)$, т. е. $ps - rq = 0 = us - rw$, то $psw - rqw = 0 = usq - rwq$, откуда $s(pw - uq) = 0$, и $pw = uq$, т. е. $(p, q) \sim (u, w)$.

Упр. 1.11. Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке O под углом $0 < \alpha \leq \pi/2$, то отражение относительно ℓ_1 , а потом отражение относительно ℓ_2 — это поворот вокруг точки O на угол 2α в направлении от первой прямой ко второй. Таким образом, отражения относительно ℓ_1 и ℓ_2 коммутируют тогда и только тогда, когда прямые перпендикулярны.

Упр. 1.12. а) \Rightarrow б). Левое обратное к вложению $f : X \hookrightarrow Y$ должно переводить $y = f(x) \in \text{im } f$ в x , а на элементах $Y \setminus \text{im } f$ может действовать как угодно. В частности, ответ на последний вопрос задачи — $(m - n)^n$.

б) \Rightarrow в). Равенство $g_1 = g_2$ получается из равенства $fg_1 = fg_2$ умножением обеих частей слева на любое левое обратное к f отображение.

в) \Rightarrow а). Если $f(x_1) = f(x_2)$ для каких-то $x_1 \neq x_2$, положим $g_1 = \text{Id}_X$, а в качестве g_2 возьмём автоморфизм $X \rightarrow X$, который меняет между собой точки x_1 и x_2 , а все остальные точки оставляет на месте. Тогда $g_1 \neq g_2$, но $fg_1 = fg_2$.

Упр. 1.13. Аналогично предыдущему [упр. 1.12](#).

Упр. 1.14. Таблица композиций gf в симметрической группе S_3 :

$g \setminus f$	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)	(3, 2, 1)	(2, 1, 3)	(2, 3, 1)	(3, 1, 2)
(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)	(3, 2, 1)	(2, 1, 3)	(2, 3, 1)	(3, 1, 2)
(1, 3, 2)	(1, 3, 2)	(1, 2, 3)	(3, 1, 2)	(2, 3, 1)	(2, 1, 3)	(3, 2, 1)
(3, 2, 1)	(3, 2, 1)	(2, 3, 1)	(1, 2, 3)	(3, 1, 2)	(1, 3, 2)	(2, 1, 3)
(2, 1, 3)	(2, 1, 3)	(3, 1, 2)	(2, 3, 1)	(1, 2, 3)	(3, 2, 1)	(1, 3, 2)
(2, 3, 1)	(2, 3, 1)	(3, 2, 1)	(2, 1, 3)	(1, 3, 2)	(3, 1, 2)	(1, 2, 3)
(3, 1, 2)	(3, 1, 2)	(2, 1, 3)	(1, 3, 2)	(3, 2, 1)	(1, 2, 3)	(2, 3, 1)