§6. Векторы

6.1. Векторные пространства. Зафиксируем произвольное поле $\Bbbk$, которое мы будем далее называть *основным*, а его элементы — *числами*. Определение векторного пространства формализует свойства алгебраических операций над геометрическими векторами — сложение векторов и умножение векторов на числа. Эти свойства присущи объектам самой разной природы: от расширений полей и пространств функций до пространств решений линейных уравнений и пространств подмножеств. Тем не менее, векторы продуктивно представлять себе именно геометрически, как направленные отрезки («стрелочки»), рассматриваемые с точностью до параллельного переноса.

Определение 6.1
Аддитивная абелева группа V называется *векторным пространством* (а её элементы — *векторами*) над полем $\Bbbk$, если на ней задана операция *умножения векторов на числа*

$$\Bbbk \times V \to V \;:\; (\lambda, v) \mapsto \lambda v\,,$$

которая обладает следующими свойствами:

$$\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \Bbbk\,,\;\; \forall\, v \in V \tag{6-1}$$

$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \Bbbk\,,\;\; \forall\, v \in V \tag{6-2}$$

$$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \qquad \forall\, v, w \in V\,,\;\; \forall\, \lambda \in \Bbbk \tag{6-3}$$

$$1 \cdot v = v \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \Bbbk\,,\;\; \forall\, v \in V\;. \tag{6-4}$$

Групповая операция в векторном пространстве V называется *сложением векторов*. Нейтральный элемент 0 группы V называется *нулевым вектором*, а векторы v и $-v$ — *противоположными* векторами. Подмножество $U \subset V$, являющееся векторным пространством относительно имеющихся в V операций, называется *подпространством* в V.

Упражнение 6.1. Выведите из свойств (6-1) – (6-3), что для всех $v \in V$ и $\lambda \in \Bbbk$ выполняются равенства $0 \cdot v = 0$ и $\lambda \cdot 0 = 0$, а также, что результатом умножения произвольного вектора v на число $-1 \in \Bbbk$ является противоположный к v вектор, т. е. $(-1) \cdot v = -v$.

Замечание 6.1. Иногда мы будем записывать произведение вектора $v \in V$ на число $\lambda \in \Bbbk$ не как λv, а как $v\lambda$. Мы по определению считаем обе эти записи равнозначными.

Пример 6.1 (нулевое пространство)
Простейший пример векторного пространства — это *нулевое* (или *тривиальное*) пространство 0, состоящее из одного нулевого вектора 0, обратного самому себе и такого, что $\forall\, \lambda \in \Bbbk \quad \lambda \cdot 0 = 0$.

Пример 6.2 (основное поле)
Основное поле $\Bbbk$, в котором сложение векторов и умножение векторов на числа суть сложение и умножение, которые имеются в поле $\Bbbk$, также является векторным пространством над $\Bbbk$.

Пример 6.3 (координатная плоскость)
Простейшее векторное пространство, отличное от нуля и основного поля — это *координатная плоскость* $\Bbbk^2 = \Bbbk \times \Bbbk$, векторами которой по определению являются столбцы чисел $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $x_1,\, x_2 \in \Bbbk$. Сложение векторов и умножение векторов на числа определяются покоординатно: $\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \mu b_1 \\ \lambda a_2 + \mu b_2 \end{pmatrix}$.

6.1.1. Линейные отображения. Отображение $F : U \to W$ из векторного пространства U в векторное пространство W называется *линейным отображением*[1], если оно перестановочно со сложением векторов и умножением векторов на числа, т. е.

$$\forall\, a, b \in U \quad \text{и} \quad \forall\, \alpha, \beta \in \Bbbk \qquad F(\alpha a + \beta b) = \alpha F(a) + \beta F(b)\,.$$

Мы уже сталкивались с линейными отображениями $\Bbbk[x] \to \Bbbk[x]$ в n° 4.6 на стр. 59, когда изучали разностные операторы на пространстве многочленов.

Векторные пространства, между которыми имеется взаимно однозначное линейное отображение, называются *изоморфными*, а само отображение называется в этом случае *изоморфизмом* векторных пространств.

Будучи гомоморфизмом абелевых групп, всякое линейное отображение $F : V \to W$ обладает всеми свойствами, перечисленными нами в n° 2.6 на стр. 25. В частности, $F(0) = 0$ и $\forall\, v \quad F(-v) = -F(v)$. Образ $\operatorname{im} F = F(V)$ — это подпространство в V, а ядро

$$\ker F = F^{-1}(0) = \{v \in V \mid F(v) = 0\}$$

является подпространством в V, и слой отображения F над каждым вектором $w \in \operatorname{im} F$ представляет собой параллельный сдвиг ядра на произвольно выбранный вектор из этого слоя: если $F(v) = w$, то $F^{-1}(w) = v + \ker F$. В частности, линейное отображение инъективно тогда и только тогда, когда его ядро нулевое.

Предостережение 6.1. Обратите внимание, что отображение $\varphi : \Bbbk \to \Bbbk$, заданное формулой $\varphi(x) = a \cdot x + b$, которое в школе принято называть «линейной функцией», линейно в смысле n° 6.1.1 *только* при $b = 0$. Если же $b \neq 0$, то

$$\varphi(\lambda x) \neq \lambda\varphi(x) \quad \text{и} \quad \varphi(x+y) \neq \varphi(x) + \varphi(y)\,,$$

и φ *не* является линейным отображением.

6.1.2. Пропорциональность. Векторы a и b произвольного векторного пространства V называются *пропорциональными*[2], если $x \cdot a = y \cdot b$ для некоторых чисел $x, y \in \Bbbk$, не равных одновременно нулю. Таким образом, нулевой вектор пропорционален любому вектору, а пропорциональность ненулевых векторов a и b означает, что $a = \lambda b$ и $b = \lambda^{-1} a$ для некоторого ненулевого $\lambda \in \Bbbk$.

[1] а также *линейным оператором* или *гомоморфизмом векторных пространств*
[2] а также *коллинеарными* или *линейно зависимыми*

Пример 6.4 (определитель 2×2)
В координатном пространстве $\Bbbk^2$ из прим. 6.3 пропорциональность векторов

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

равносильна равенству перекрёстных произведений: $a_1 b_2 = a_2 b_1$. Величина

$$\det(a, b) \overset{\text{def}}{=} a_1 b_2 - a_2 b_1$$

называется *определителем* векторов a и b из $\Bbbk^2$. Очевидно, что

$$\det(a, b) = 0 \iff a \text{ и } b \text{ пропорциональны} \tag{6-5}$$

$$\det(a, b) = -\det(b, a) \qquad \forall\, a, b \in \Bbbk^2 \tag{6-6}$$

$$\det(\lambda a, b) = \lambda \det(a, b) = \det(a, \lambda b) \qquad \forall\, a, b \in \Bbbk^2 \text{ и } \forall\, \lambda \in \Bbbk \tag{6-7}$$

$$\begin{aligned} \det(a_1 + a_2, b) &= \det(a_1, b) + \det(a_2, b) \\ \det(a, b_1 + b_2) &= \det(a, b_1) + \det(a, b_2) \end{aligned} \qquad \forall\, a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 \in \Bbbk^2 \tag{6-8}$$

Свойство (6-6) называется *кососимметричностью*, свойство (6-7) — *однородностью*, свойство (6-8) — *аддитивностью*. Вместе однородность и аддитивность означают, что определитель *линеен* по каждому из двух своих аргументов и для любых векторов $a, b, c, d \in \Bbbk^2$ и чисел $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Bbbk$ имеет место *дистрибутивность*:

$$\det(\,\alpha a + \beta b\,,\ \gamma c + \delta d\,) = \alpha\gamma \det(a, c) + \alpha\delta \det(a, d) + \beta\gamma \det(b, c) + \beta\delta \det(b, d)\,. \tag{6-9}$$

Важное геометрическое следствие этих формул заключается в том, что любая пара непропорциональных векторов $a, b \in \Bbbk^2$ образует *базис* пространства $\Bbbk^2$ в том смысле, что каждый вектор $v \in \Bbbk^2$ единственным образом представляется в виде

$$v = x \cdot a + y \cdot b \quad \text{с} \quad x,\, y \in \Bbbk\,, \tag{6-10}$$

причём коэффициенты x, y этого разложения можно вычислять по *правилу Крамера*

$$\begin{aligned} x &= \det(v, b)/\det(a, b) \\ y &= \det(a, v)/\det(a, b)\,. \end{aligned} \tag{6-11}$$

В самом деле, т. к. $\det(a, a) = \det(b, b) = 0$, для любого разложения (6-10)

$$\begin{aligned} \det(a, v) &= \det(a, x \cdot a + y \cdot b) = x \cdot \det(a, a) + y \cdot \det(a, b) = y \cdot \det(a, b) \\ \det(v, b) &= \det(x \cdot a + y \cdot b, b) = x \cdot \det(a, b) + y \cdot \det(b, b) = x \cdot \det(a, b)\,, \end{aligned}$$

что даёт для x и y выражения (6-11). С другой стороны, для любого $v \in \Bbbk^2$ равенство

$$v = \frac{\det(v, b)}{\det(a, b)} \cdot a + \frac{\det(a, v)}{\det(a, b)} \cdot b$$

и в самом деле выполнено: разность $v - \det(v, b) \cdot a/\det(a, b)$ пропорциональна b, т. к.

$$\det\left(\, v - \frac{\det(v, b)}{\det(a, b)} \cdot a\,,\ b\,\right) = \det(v, b) - \frac{\det(v, b)}{\det(a, b)} \cdot \det(a, b) = 0\,,$$

а это означает, что $v = \det(v, b) \cdot a/\det(a, b) + \lambda \cdot b$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk$, откуда по правилу Крамера $\lambda = \det(a, v)/\det(a, b)$.

6.2. Базисы и размерность. Рассмотрим произвольное векторное пространство V над полем $\Bbbk$. Скажем, что вектор v *линейно выражается* через векторы $w_1, w_2, \dots, w_m$, если

$$v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m$$

для некоторых $\lambda_i \in \Bbbk$. Правая часть этой формулы называется *линейной комбинацией* векторов $w_i \in V$ с коэффициентами $\lambda_i \in \Bbbk$.

Семейство[1] векторов $\{w_\nu\}$ называется *порождающим* векторное пространство V, если каждый вектор $v \in V$ линейно выражается через какое-нибудь *конечное* множество векторов из этого семейства[2]. Векторное пространство, в котором имеется конечный порождающий набор векторов, называется *конечномерным*.

Порождающий векторное пространство V набор векторов $\{e_\nu\}$ называется *базисом* этого пространства пространства, если любой вектор $v \in V$ имеет *единственное* представление в виде конечной линейной комбинации базисных векторов. Коэффициенты x_i единственного линейного выражения $v = \sum x_i e_i$ вектора v через базисные векторы e_ν называются *координатами* вектора v в базисе $\{e_\nu\}$.

Ниже, в сл. 6.1, мы покажем, что любое конечномерное векторное пространство V обладает базисом, причём все базисы состоят из одно и того же числа векторов. Это число называется *размерностью* векторного пространства V и обозначается $\dim V$ или $\dim_{\Bbbk} V$, если надо подчеркнуть, о каком основном поле $\Bbbk$ идёт речь.

Пример 6.5 (координатное пространство $\Bbbk^n$)
Координатное пространство $\Bbbk^n$ является непосредственным обобщением координатной плоскости $\Bbbk^2$ из прим. 6.3. По определению, векторами пространства $\Bbbk^n$ являются упорядоченные наборы из n чисел[3]

$$(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in \Bbbk.$$

Сложение векторов и умножение векторов на числа задаётся правилами

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \dots,\ x_n + y_n)$$
$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ с единицей на i-том месте и нулями в остальных

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \tag{6-12}$$

образуют базис пространства $\Bbbk^n$, поскольку произвольный вектор

$$v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Bbbk^n$$

линейно выражается через них единственным способом:

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n. \tag{6-13}$$

Таким образом, $\dim \Bbbk^n = n$. Базис (6-12) называются *стандартным* базисом координатного пространства $\Bbbk^n$.

[1] возможно, бесконечное

[2] это конечное множество может быть разным для разных $w \in V$

[3] для экономии бумаги мы пишем их в строчку, но часто бывает удобно представлять векторы пространства $\Bbbk^n$ в виде столбцов

Пример 6.6 (пространство матриц)

Полезной разновидностью координатного пространства является *пространство* $m \times n$*–матриц* $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)$. Его векторы — это прямоугольные таблицы из m строк и n столбцов, заполненные числами из поля $\Bbbk$:

$$\left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Сложение векторов и умножение векторов на числа определяется поэлементно: если матрица $A = \left(a_{ij}\right)$ имеет в i-той строке и j-том столбце элемент a_{ij}, а матрица $B = \left(b_{ij}\right)$ — элемент b_{ij}, то их линейная комбинация $\lambda A + \mu B$ с коэффициентами $\lambda, \mu \in \Bbbk$, по определению, имеет в i-той строке и j-том столбце элемент $\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}$. Например, в пространстве $\mathrm{Mat}_{2\times 3}(\Bbbk)$ имеем равенство

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 5 & -2 & -9 \end{pmatrix} .$$

Таким образом, координатное пространство $\Bbbk^n$ можно воспринимать как пространство $\mathrm{Mat}_{1\times n}(\Bbbk)$ (матрицы, состоящие из единственной строки) или как пространство $\mathrm{Mat}_{n\times 1}(\Bbbk)$ (матрицы, состоящие из единственного столбца).

Мы будем обозначать через E_{ij} матрицу, имеющую единицу в пересечении i-той строки и j-того столбца и нули во всех остальных клетках. Матрицы E_{ij} называются *стандартными базисными матрицами* (или *матричными единицами*) и образуют базис в пространстве матриц, поскольку произвольная матрица $A = \left(a_{ij}\right)$ единственным образом линейно выражается через них: $A = \sum\limits_{ij} a_{ij} E_{ij}$. В частности, $\dim \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk) = mn$.

Пример 6.7 (пространство функций)

Пусть X — произвольное множество. Множество $\Bbbk^X$ всех функций $f : X \to \Bbbk$ образует векторное пространство относительно поточечного сложения значений функций и умножения их на константы: $f_1 + f_2 : x \mapsto f_1(x) + f_2(x)$ и $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$. Если множество X конечно и состоит из n элементов: $X = \{1, 2, \dots, n\}$, пространство функций $X \to \Bbbk$ изоморфно координатному пространству $\Bbbk^n$. В самом деле, отображение, сопоставляющее функции f набор её значений $\big(f(1), f(2), \dots, f(n)\big) \in \Bbbk^n$ линейно и биективно. Обратное отображение переводит стандартный базисный вектор $e_i \in \Bbbk^n$ в *δ-функцию* $\delta_i : X \to \Bbbk$, действующую по правилу

$$\delta_i : k \mapsto \begin{cases} 1 & \text{при } k = i \\ 0 & \text{при } 0 \neq i\,. \end{cases}$$

Пример 6.8 (пространство подмножеств)

Если в предыдущем примере взять в качестве $\Bbbk$ двухэлементное поле $\mathbb{F}_2$ и сопоставить каждому подмножеству $Z \subset X$ его *характеристическую функцию* $\chi_Z : X \to \mathbb{F}_2$, принимающую значение 1 всюду на Z и значение 0 всюду на $X \smallsetminus Z$, мы получим взаимно однозначное соответствие между пространством функций и множеством всех подмножеств в X. Эта биекция наделяет множество подмножеств структурой векторного пространства над полем $\mathbb{F}_2$, изоморфного пространству функций $X \to \mathbb{F}_2$.

Упражнение 6.2. Укажите а пространстве подмножеств какой-нибудь базис.

Пример 6.9 (многочлены и ряды)
Многочлены с коэффициентами в поле $\Bbbk$ очевидным образом образуют векторное пространство над $\Bbbk$ относительно операций сложения многочленов и умножения их на константы. Счётный набор мономов $1,\ x,\ x^2,\ \dots$ является базисом этого пространства, поскольку по определению каждый многочлен является конечной линейной комбинацией таких мономов и равенство двух многочленов означает равенство их коэффициентов.

Многочлены степени не выше n образуют в $\Bbbk[x]$ векторное подпространство, которое мы будем обозначать $\Bbbk[x]_{\leqslant n}$. Первые $n+1$ мономов $1,\ x,\ x^2,\ \dots\ ,\ x^n$ образуют в $\Bbbk[x]_{\leqslant n}$ базис.

Упражнение 6.3. Покажите, что любой набор многочленов $f_0, f_1, \dots, f_n \in \Bbbk[x]$, в котором $\deg f_m = m$ и каждый $f_m = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m$ имеет ненулевой старший коэффициент a_0, является базисом векторного пространства $\Bbbk[x]_{\leqslant n}$ многочленов степени не выше n.

В пространстве формальных степенных рядов $\Bbbk[\![x]\!]$ счётный набор мономов $1,\ x,\ x^2,\ \dots$ базисом *не является*, поскольку ряд с бесконечным числом ненулевых коэффициентов не является *конечной* линейной комбинацией мономов.

Упражнение 6.4. Покажите, что в $\Bbbk[\![x]\!]$ нет счётного базиса.

6.2.1. Линейная зависимость. Векторы $v_1, v_2, \dots, v_m$ в произвольном векторном пространстве V называются *линейно независимыми*, если из равенства

$$\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \dots + \lambda_mv_m = 0 \tag{6-14}$$

вытекает, что все $\lambda_i = 0$. Наоборот, если существует конечная линейная комбинация (6-14), равная нулевому вектору и имеющая хоть один ненулевой коэффициент λ_i, то векторы $v_1, v_2, \dots, v_m$ называются *линейно зависимыми*. Отметим, что любой набор векторов, содержащий нулевой вектор, линейно зависим.

Наличие между векторами линейной зависимости позволяет линейно выразить любой из входящих в неё с ненулевым коэффициентом векторов через остальные. Например, при $\lambda_m \neq 0$

$$v_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\,v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m}\,v_2 - \ \cdots\ - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\,v_{m-1}\,.$$

Наоборот, всякое линейное выражение вида $v_m = \mu_1v_1 + \mu_2v_2 + \dots + \mu_{m-1}v_{m-1}$ можно воспринимать как линейную зависимость

$$\mu_1v_1 + \mu_2v_2 + \dots + \mu_{m-1}v_{m-1} - v_m = 0\,.$$

Лемма 6.1
Набор векторов $\{e_\nu\}$, порождающий векторное пространство V, тогда и только тогда является базисом, когда он линейно независим.

Доказательство. Если $\sum\lambda_ie_i = 0$ и не все λ_i нулевые, то любой вектор $v = \sum x_ie_i$ допускает *другое* выражение $v = \sum(x_i + \lambda_i)e_i$ через векторы e_i. Наоборот, если какой-нибудь вектор допускает два различных представления $v = \sum x_ie_i = \sum y_ie_i$, то перенося правую часть в середину, получаем линейную зависимость $\sum(x_i - y_i)v_i = 0$. $\square$

Лемма 6.2 (лемма о замене)
Если векторы $w_1, w_2, \dots, w_m$ порождают V, а векторы $u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно независимы, то $m \geqslant k$ и векторы w_i можно перенумеровать так, что набор $u_1, u_2, \dots, u_k,\ w_{k+1},\ w_{k+2},\ \dots\ ,\ w_m$ (получающихся заменой первых k векторов w_i векторами u_i) также будет порождать пространство V.

Доказательство. Пусть $u_1 = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_m w_m$. Поскольку $u_1 \neq 0$ (иначе векторы u_i линейно зависимы), среди коэффициентов x_i есть хоть один ненулевой. Перенумеруем векторы w_i так, чтобы $x_1 \neq 0$. Тогда вектор w_1 линейно выражается через u_1 и $w_2, \dots, w_m$:

$$w_1 = \frac{1}{x_1} u_1 - \frac{x_2}{x_1} w_2 - \dots - \frac{x_m}{x_1} w_m .$$

Следовательно, векторы $u_1,\ w_2,\ w_3,\ \dots\ ,\ w_m$ порождают V.

Далее действуем по индукции. Пусть для очередного i в пределах $1 \leqslant i < k$ векторы $u_1, u_2, \dots, u_i,\ w_{i+1},\ w_{i+2},\ \dots\ ,\ w_m$ порождают V. Тогда

$$u_{i+1} = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_i u_i + x_{i+1} w_{i+1} + x_{i+2} w_{i+2} + \dots + x_m w_m . \tag{6-15}$$

Поскольку векторы u_ν линейно независимы, вектор u_{i+1} нельзя линейно выразить только через векторы $u_1, u_2, \dots, u_i$, и значит, в разложение (6-15) входит с ненулевым коэффициентом хотя бы один из оставшихся векторов w_j. Следовательно, $m > i$ и мы можем занумеровать оставшиеся w_j так, чтобы в $x_{i+1} \neq 0$. Теперь, как и на первом шагу, вектор w_{i+1} линейно выражается через векторы $u_1, u_2, \dots, u_{i+1}, w_{i+2},\ w_{i+3},\ \dots\ ,\ w_m$, и, значит, этот набор порождает V, что воспроизводит индуктивное предположение. □

Упражнение 6.5. Покажите, что векторное пространство V тогда и только тогда бесконечномерно, когда в нём имеются линейно независимые наборы из сколь угодно большого числа векторов.

Следствие 6.1 (теорема о базисе)
В каждом векторном пространстве V любой порождающий набор векторов содержит в себе некоторый базис, а любой линейно независимый набор векторов можно дополнить до базиса. При этом все базисы равномощны.

Доказательство. Мы докажем теорему в предположении, что пространство V конечномерно. Доказательство для общего случая намечено в зам. 6.2. — оно совершенно аналогично, но привлекает некоторые факты из курса математической логики.

Пусть пространство V порождается векторами $v_1, v_2, \dots, v_m$. По очереди выкидывая из него те векторы, которые линейно выражаются через остальные, мы в конце концов получим линейно независимый порождающий набор векторов, который по лем. 6.1 является базисом.

Поскольку число векторов в любом линейно независимом наборе не больше, чем в любом порождающем, все базисы состоят из одинакового количества векторов.

Добавляя к произвольно взятому линейно независимому набору векторов вектор, который не выражается через него линейно, мы получаем линейно независимый набор векторов. В силу леммы о замене, повторив эту процедуру не более m раз, мы придём к линейно независимому набору, порождающему всё пространство, т. е. получим базис. □

Следствие 6.2
В n-мерном векторном пространстве V всякий линейно независимый набор из n векторов, а также всякий порождающий набор из n векторов является базисом.

Доказательство. Пусть векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ составляют базис V, а векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$ линейно независимы. По лемме о замене (лем. 6.2) порождающие векторы e_i можно заменить векторами v_i так, что набор $v_1, v_2, \dots, v_n$ останется порождающим. Тем самым, он — базис. Пусть теперь векторы $w_1, w_2, \dots, w_n$ порождают V. Тогда этот набор векторов содержит в себе некоторый базис. По теореме о базисе в нём должно быть ровно n векторов, т. е. этот базис совпадает со всем набором $w_1, w_2, \dots, w_n$. □

Следствие 6.3
Всякое n-мерное векторное пространство V над полем $\Bbbk$ изоморфно координатному пространству $\Bbbk^n$. Множество изоморфизмов между V и $\Bbbk^n$ взаимно однозначно соответствует множеству базисов в V.

Доказательство. Если отображение $F : \Bbbk^n \xrightarrow{\sim} V$ является изоморфизмом, то образы $v_i = F(e_i)$ стандартных базисных векторов $e_i \in \Bbbk^n$ из (6-12) образуют базис пространства V. Наоборот, для любого базиса $v_1, v_2, \dots, v_n$ пространства V отображение $F : \Bbbk^n \to V$, заданное правилом $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n$, линейно, биективно и переводит стандартный базис (6-12) пространства $\Bbbk^n$ в базис v_i пространства V. □

Пример 6.10 (конечные расширения полей)
Всякое поле $\mathbb{F}$ является векторным пространством над любым своим подполем $\Bbbk \subset \mathbb{F}$. Расширение полей $\Bbbk \subset \mathbb{F}$ называется *конечным*, если объемлющее поле $\mathbb{F}$ конечномерно как векторное пространство над $\Bbbk$. Например, любое конечное поле $\mathbb{F}$ характеристики $p = \operatorname{char} \mathbb{F}$ является конечным расширением своего простого подполя $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}$. Поэтому, по сл. 6.3 $\mathbb{F} \simeq \mathbb{F}_p^n$ как векторное пространство над $\mathbb{F}_p$. В частности, $\mathbb{F}$ состоит из p^n элементов, где $n = \dim_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}$, что даёт простое геометрическое решение упр. 3.23.

Упражнение 6.6. Может ли поле из 9 элементов быть подполем поля из 27 элементов?

Замечание 6.2. Без предположения о том, что пространство V линейно порождается конечным набором векторов, сл. 6.1 доказывается следующим образом. Множество всех линейно независимых наборов векторов в V, частично упорядоченное отношением включения, является *полным* в том смысле, что для каждого линейно упорядоченного по включению множества линейно независимых наборов векторов существует линейно независимый набор векторов, содержащий в себе все наборы из рассматриваемого множества.

Упражнение 6.7. Убедитесь, что в качестве такого мажорирующего набора можно взять объединение всех наборов из рассматриваемого множества.

Поэтому, согласно *лемме Цорна*[1], любой линейно независимый набор векторов содержится в некотором *максимальном* линейно независимом наборе $\{e_\nu\}$ — таком, который сам

[1] напомним, что *лемма Цорна* утверждает, что всякое полное частично упорядоченное множество содержит хоть один максимальный элемент, см. *Ван Дер Варден*, «Алгебра» (М., «Мир», 1976, стр. 246 – 249) или *П. С. Александров*, «Введение в теорию множеств и общую топологию» (М., «Наука», 1977, стр. 80 – 83)

уже не содержится ни в каком строго большем линейно независимом наборе. Этот максимальный линейно независимый набор $\{e_\nu\}$ является порождающим, т. к. при добавлении к нему любого вектора v будет получаться линейно зависимый набор, и в силу линейной независимости векторов e_ν линейная зависимость между векторами v и e_i будет содержать вектор v с ненулевым коэффициентом, т. е. v будет линейно выражаться через e_i. Таким образом, любой линейно независимый набор векторов содержится в некотором базисе.

Если в проделанном рассуждении ограничиться рассмотрением линейно независимых наборов векторов, содержащихся в произвольно заданном множестве векторов $\mathcal{G} \subset V$, линейно порождающем пространство V, мы получим базис пространства V, являющийся подмножеством в $\mathcal{G}$.

Доказательство того, что любые два базиса равномощны, требует трансфинитного расширения лем. 6.2.

Упражнение 6.8. Пусть множество векторов $\mathcal{G} \subset V$ порождает V, а множество векторов $\mathcal{E} \subset V$ линейно независимо. Покажите, что в $\mathcal{G}$ имеется равномощное $\mathcal{E}$ подмножество, такое что после замены векторов этого подмножества множеством векторов $\mathcal{E}$ полученный набор векторов останется порождающим.

Из этого упражнения вытекает, любая линейно независимая система векторов равномощна некоторому подмножеству любой порождающей системы. Отсюда по теореме Кантора – Бернштейна[1] мы заключаем, что любые два базиса равномощны.

6.3. Линейные отображения $F : U \to W$ между двумя векторными пространствами U и W тоже образуют векторное пространство относительно операций поточечного сложения значений и умножения их на числа: $F+G : v \mapsto F(v)+G(v)$ и $\lambda F : v \mapsto \lambda \cdot F(v)$. Пространство линейных отображений обозначается через $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(U, W)$, или просто $\mathrm{Hom}(U, W)$, если основное поле не существенно.

Предложение 6.1
Если V конечномерно, то для любого линейного отображения $F : V \to W$

$$\dim\ker F + \dim\operatorname{im} F = \dim V\,. \tag{6-16}$$

Доказательство. Выберем в подпространстве $\ker F$ базис $u_1, u_2, \dots, u_k$ и дополним его векторами $e_1, e_2, \dots, e_m$ до базиса всего пространства V. Достаточно показать, что векторы $F(e_1)$, $F(e_2)$, … , $F(e_m)$ составляют базис в $\operatorname{im} F$. Они порождают образ, т. к. для любого вектора $v = \sum y_i u_i + \sum x_j e_j$ выполняется равенство $F(v) = \sum y_i F(u_i) + \sum x_j F(e_j) = \sum x_j F(e_j)$. Они линейно независимы, поскольку равенство $0 = \sum \lambda_i F(e_i) = F(\sum \lambda_i e_i)$ означало бы, что вектор $\sum \lambda_i e_i$ лежит в $\ker F$, а значит, является линейной комбинацией векторов u_i, что возможно только когда все $\lambda_i = 0$. □

Следствие 6.4
Следующие свойства линейного отображения $F : V \to V$ из пространства V в себя эквивалентны друг другу: (1) F изоморфизм (2) $\ker F = 0$ (3) $\operatorname{im} F = V$.

[1]напомним, что *теорема Кантора – Бернштейна* утверждает, что если множество A инъективно отображается в множество B, а множество B инъективно отображается в множество A, то между множествами A и B существует биекция

Доказательство. Свойства (2) и (3) равносильны друг другу по предл. 6.1, а их одновременное выполнение равносильно (1). □

6.3.1. Матричная запись. Если пространства U и W конечномерны, то выбирая в них базисы

$$u_1, u_2, \dots, u_n \in U \quad \text{и} \quad w_1, w_2, \dots, w_m \in W \tag{6-17}$$

и выражая образы $F(u_j)$ базисных векторов пространства U через базис пространства W в виде

$$F(u_j) = \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot f_{ij} \in W \tag{6-18}$$

мы получаем набор коэффициентов $\left(f_{ij}\right)$, который организуем в таблицу, отправив координаты вектора $F(u_j)$ в её j-тый столбец. Получающаяся таким образом матрица

$$\left(F(u_1),\, F(u_2),\, \dots\, ,\, F(u_n)\right) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m\times n} \tag{6-19}$$

называется *матрицей оператора F в базисах* (6-17) и обозначается[1] $F_{wu} = \left(f_{ij}\right)$.

Упражнение 6.9. Убедитесь, что при сложении линейных отображений и умножении линейных отображений на числа их матрицы (в зафиксированных базисах) складываются и умножаются на числа.

Предложение 6.2
При любом выборе базисов $u_1, u_2, \dots, u_n \in U$ и $w_1, w_2, \dots, w_m \in W$ отображение

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(U, W) \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(\Bbbk)\,, \quad F \mapsto F_{wu} \tag{6-20}$$

является линейным изоморфизмом векторных пространств. В частности,

$$\dim \mathrm{Hom}(U, W) = \dim U \cdot \dim W\,.$$

Доказательство. Если отображение $F : U \to W$ линейно, то его действие на произвольный вектор $v = \sum u_j x_j$ однозначно восстанавливается по значениям F на базисных векторах u_i пространства U:

$$F(v) = F\Big(\sum_{j=1}^{n} u_j x_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} F(u_j) \cdot x_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} w_i \cdot f_{ij} x_j\,. \tag{6-21}$$

Поэтому, отображение (6-20) инъективно. С другой стороны, любая матрица $\left(f_{ij}\right)$ задаёт по формуле (6-21) отображение $F : U \to W$.

Упражнение 6.10. Проверьте, что это отображение линейно, и его матрица в базисах u и w есть матрица $\left(f_{ij}\right)$.

Таким образом, отображение (6-20) сюрьективно. Его линейность вытекает из упр. 6.9 □

[1]индексы w и u в обозначении F_{wu} указывают на зависимость этой матрицы от выбранных базисов; для элемента, стоящего в пересечении i-той строки и j-того столбца матрицы F_{wu}, мы всегда будем использовать обозначение f_{ij}, в котором для экономии места не будет указаний на то, в каких именно базисах написана матрица

Пример 6.11 (качественная теория линейных уравнений)
Всякая система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{6-22}$$

констатирует тот факт, что вектор $b \in \Bbbk^m$, столбец координат которого стоит в правой части системы (6-22), является образом неизвестного вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Bbbk^n$ под действием линейного оператора $A : \Bbbk^n \to \Bbbk^m$, переводящего стандартные базисные векторы координатного пространства $\Bbbk^n$ в столбцы матрицы $\left(a_{ij}\right)$, составленной коэффициентов левых частей уравнений (6-22). Таким образом, речь идёт об одном уравнении $A(x) = b$ на вектор x, качественное устройство решений которого мы уже много раз описывали: если $b \notin \operatorname{im} A$, то множество решений пусто, а если $b \in \operatorname{im} A$, множество решений является параллельным сдвигом подпространства $\ker A$ на произвольный вектор $v \in \Bbbk^n$, являющийся решением. Иначе говоря, разность любых двух решений x и x' является решением однородной системы линейных уравнений, получающейся из (6-22), если положить все $b_i = 0$. Из предл. 6.1 и сл. 6.4 вытекают

Следствие 6.5
Размерность пространства решений системы из m однородных[1] линейных уравнений от n переменных не меньше, чем $n - m$. В частности, любая система однородных линейных уравнений, в которой число переменных строго больше числа уравнений, всегда обладает ненулевым решением.

Следствие 6.6 (альтернатива Фредгольма)
Если в системе (6-22) число уравнений равно числу неизвестных, то либо она имеет единственное решение при любых значениях правых частей, либо система однородных уравнений, возникающих, когда все $b_i = 0$, обладает ненулевым решением.

6.4. Подпространства. Согласно теореме о базисе вытекает, что базис любого подпространства $U \subset V$ можно дополнить до базиса во всём пространстве, откуда, в частности, следует, что любое подпространство U в конечномерном пространстве V тоже конечномерно, и $\dim U \leqslant \dim V$.

Для подпространства U в конечномерном пространстве V разность размерностей

$$\operatorname{codim}_V U \overset{\text{def}}{=} \dim V - \dim U$$

называется *коразмерностью* подпространства U в V. Например, по предл. 6.1 размерность образа линейного отображения равна коразмерности его ядра.

Пример 6.12 (гиперплоскости)
Векторные подпространства коразмерноси 1 в V называются *гиперплоскостями*. Если $\xi : V \to \Bbbk$ — ненулевое линейное отображение, то оно сюрьективно, и по предл. 6.1 его ядро $\ker \xi \subset V$ является гиперплоскостью в V. Например, многочлены степени не выше n,

[1] т. е. с нулевыми правыми частями

имеющие заданный корень $a \in \Bbbk$, образуют гиперплоскость в пространстве $\Bbbk[x]_{\leqslant n}$ всех многочленов степени не выше n. Эта гиперплоскость является ядром ненулевого линейного отображения $\mathrm{ev}_a : f \mapsto f(a)$, сопоставляющего многочлену его значение в точке a.

Упражнение 6.11*. Покажите, что всякая гиперплоскость $W \subset V$ представляется в виде $W = \ker \xi$ для некоторого ненулевого линейного отображения $\xi : V \to \Bbbk$, причём ξ определяется по W однозначно с точностью до умножения на ненулевую константу.

6.4.1. Линейные оболочки. Пересечение любого семейства подпространств произвольного векторного пространства V является подпространством в V. Пересечение всех подпространств, содержащих заданное множество векторов $M \subset V$, называется *линейной оболочкой* множества M и обозначается

$$\mathrm{span}(M) = \bigcap_{U \supset M} U\,. \tag{6-23}$$

Это наименьшее по включению векторное подпространство в V, содержащее M. Иначе его можно описать как множество всех конечных линейных комбинаций векторов из M. В самом деле, такие линейные комбинации составляют векторное подпространство в V, которое содержатся в любом подпространстве, содержащем M .

Упражнение 6.12*. Покажите, что линейная оболочка любого множества векторов $M \subset V$ совпадает с пересечением всех содержащих M гиперплоскостей в V.

6.4.2. Сумма подпространств. Объединение подпространств, как правило, подпространством не является. Например многочлены вида ax^2 и многочлены вида bx образуют два одномерных подпространства в пространстве многочленов, но сумма x^2+x не лежит в их объединении.

Упражнение 6.13. Покажите, что объединение двух подпространств является подпространством только когда одно из подпространств содержится в другом.

Линейная оболочка объединения $\bigcup\limits_{\nu} U_\nu$ заданного набора подпространств $U_\nu \subset V$ называется *суммой* подпространств U_ν и обозначается $\sum U_\nu$. Таким образом, сумма подпространств состоит из всевозможных конечных сумм векторов, принадлежащих этим подпространствам. Например,

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 &= \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1\,,\ u_2 \in U_2\} \\ U_1 + U_2 + U_3 &= \{u_1 + u_2 + u_3 \mid u_1 \in U_1\,,\ u_2 \in U_2\,,\ u_3 \in U_3\} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Предложение 6.3

Если подпространства U_1, U_2 произвольного векторного пространства V конечномерны, то $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2)$.

Доказательство. Выберем какой-нибудь базис $u_1, u_2, \dots, u_k$ в $U_1 \cap U_2$ и дополним его векторами $v_1, v_2, \dots, v_r$ и $w_1, w_2, \dots, w_s$ до базисов в подпространствах U_1 и U_2 соответственно. Достаточно показать, что векторы $u_1, u_2, \dots, u_k,\ v_1, v_2, \dots, v_r,\ w_1, w_2, \dots, w_s$ образуют базис пространства $U_1 + U_2$. Ясно, что они его порождают. Допустим, что они линейно зависимы. Поскольку каждый из наборов $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r$ и $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_s$ в отдельности линейно независим, в линейной зависимости

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_r v_r + \eta_1 w_1 + \eta_2 w_2 + \dots + \eta_s w_s = 0$$

присутствуют как векторы v_i, так и векторы w_j. Перенося $u_1, u_2, \dots, u_k$, $v_1, v_2, \dots, v_r$ в одну часть, а $w_1, w_2, \dots, w_s$ — в другую, получаем равенство между вектором из U_1 и вектором из U_2, означающее, что этот вектор лежит в пересечении $U_1 \cap U_2$. Но тогда в его разложении по базисам пространств U_1 и U_2 нет векторов v_i и w_j — противоречие. □

Следствие 6.7
Для любых подпространств U_1, U_2 конечномерного векторного пространства V выполняется неравенство $\dim(U_1 \cap U_2) \geqslant \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(V)$. В частности, $U_1 \cap U_2 \neq 0$ при $\dim(U_1) + \dim(U_2) > \dim V$.

Доказательство. Это вытекает из предл. 6.3 и неравенства $\dim(U_1 + U_2) \leqslant \dim V$. □

Следствие 6.8
Следующие три условия на подпространства $U_1, U_2 \subset V$ равносильны друг другу:

1) $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$ 2) $U_1 \cap U_2 = 0$

3) любой вектор $w \in U_1 + U_2$ имеет *единственное* представление в виде $w = u_1 + u_2$ с $u_1 \in U_1$ и $u_2 \in U_2$

Доказательство. По сл. 6.7 (1) $\iff$ (2). Покажем, что (2) $\iff$ (3). Если $U_1 \cap U_2 \ni u \neq 0$, то нулевой вектор $0 \in U_1 + U_2$ имеет как минимум два разложения в виде $w = u_1 + u_2$ с $u_1 \in U_1$ и $u_2 \in U_2$: можно взять $u_1 = u_2 = 0$, а можно взять $u_1 = u$, $u_2 = -u$. Если же $U_1 \cap U_2 = 0$, то из равенства $u_1' + u_2' = u_1'' + u_2''$, в котором $u_1', u_1'' \in U_1$ и $u_2', u_2'' \in U_2$, следует равенство $u_1' - u_1'' = u_2'' - u_2'$, левая часть которого лежит в U_1, а правая — в U_2. Поэтому вектор $u_1' - u_1'' = u_2'' - u_2'$ лежит в $U_1 \cap U_2 = 0$ и, стало быть, равен нулю, т. е. $u_1' = u_1''$ и $u_2' = u_2''$. □

6.4.3. Трансверсальные подпространства. Подпространства $U_1, U_2 \subset V$, удовлетворяющие условиям из сл. 6.8, называются *трансверсальными*. Сумма трансверсальных подпространств называется *прямой* и обозначается $U_1 \oplus U_2$. Трансверсальные подпространстваназываются *дополнительными*, если $U_1 \oplus U_2 = V$. По сл. 6.8 для этого необходимо и достаточно, чтобы $\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(V)$.

Упражнение 6.14. Пусть $\xi : V \to \Bbbk$ — линейное отображение, и $v \in V$ таков, что $\xi(v) \neq 0$. Покажите, что порождённое вектором v одномерное подпространство $\Bbbk \cdot v \subset V$ трансверсально к гиперплоскости $\ker \xi$ и $V = \Bbbk \cdot v \oplus \ker \xi$.

Более общим образом, сумма подпространств $U_1, U_2, \dots, U_n \subset V$ называется *прямой* и обозначается $U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$, если каждый вектор $w \in U_1 + U_2 + \dots + U_n$ имеет единственное представление в виде $w = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ с $u_i \in U_i$. Иначе можно сказать, что сумма подпространств $U_1, U_2, \dots, U_m \subset V$ прямая тогда и только тогда, когда любой набор ненулевых векторов $u_1, u_2, \dots, u_m$, где $u_i \in U_i$, линейно независим.

Например, если векторы $\{e_i\}$ образуют базис пространства V, то V является прямой суммой одномерных подпространств, порождённых векторами e_i.

Упражнение 6.15. Покажите, что для того, чтобы сумма подпространств U_i была прямой, необходимо и достаточно, чтобы каждое из подпространств U_i было трансверсально сумме остальных подпространств.

6.4.4. Прямые суммы и прямые произведения. Для любого семейства векторных пространств V_ν, где индекс ν пробегает произвольное фиксированное множество X, прямое произведение абелевых групп[1] $\prod\limits_{\nu\in X} V_\nu$, элементами которого являются семейства векторов (v_ν), в которых $v_\nu \in V_\nu$, имеет естественную структуру векторного пространства с покомпонентными операциями $\lambda\cdot(v_\nu)+\mu\cdot(w_\nu) = (\lambda v_\nu + \mu w_\nu)$. Оно называется *прямым произведением* пространств V_ν.

Подпространство прямого произведения, состоящее из семейств (v_ν), содержащих лишь конечное число ненулевых векторов, называется *прямой суммой* векторных пространств V_ν и обозначается $\bigoplus\limits_\nu V_\nu$.

Если набор пространств $V_1, V_2, \dots, V_n$ конечен, то прямая сумма совпадает с прямым произведением: $V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$.

Упражнение 6.16. Пусть векторное пространство V является прямой суммой своих подпространств $U_1, U_2, \dots, U_m \subset V$ в смысле n° 6.4.3. Покажите, что V изоморфно прямой сумме пространств U_i, рассматриваемых как абстрактные векторные пространства.

Если набор подпространств бесконечен, прямое произведение строго мощнее прямой суммы и линейно ею не порождается. Например, прямая сумма счётного семейства одномерных пространств изоморфна пространству многочленов $\Bbbk[x]$, а прямое произведение счётного семейства одномерных пространств изоморфно пространству степенных рядов $\Bbbk[[x]]$ (ср. с прим. 6.9 на стр. 87).

6.5. Аффинные пространства. Множество A называется *аффинным*[2] *пространством* над заданным векторным пространством V, если каждому вектору $v \in V$ сопоставлено *преобразование сдвига* (или *параллельный перенос*) $\tau_v : A \to A$ так, что выполняются следующие три свойства:

$$1)\ \tau_0 = \mathrm{Id}_A\,, \qquad 2)\ \forall\, v, w \in V \quad \tau_u \circ \tau_w = \tau_{u+w} \tag{6-24}$$

$$3)\ \forall\, p, q \in A\ \exists \text{ единственный } v \in V : \tau_v(p) = q \tag{6-25}$$

Размерностью аффинного пространства A называется размерность $\dim V$ векторного пространства V.

Первые два условия (6-24) означают, что параллельные переносы на всевозможные векторы $v \in V$ образуют абелеву группу преобразований пространства A. Отметим, что обратным к преобразованию сдвига τ_v на вектор v является сдвиг τ_{-v} на противоположный вектор $-v$.

Третье условие (6-25) означает, что любую точку q можно получить из любой точки p *единственным* преобразованием сдвига τ_v. Задающий этот сдвиг вектор v обозначается через $\overrightarrow{pq}$. Продуктивно представлять его себе как стрелку с началом в точке $p \in A$ и

[1] см. n° 2.5 на стр. 24

[2] это слово является бесхитростной калькой с английского *affine* (ассоциированный)

концом в точке $q \in A$. Из (6-24) вытекает, что

$$\overrightarrow{pp} = 0 \quad \text{и} \quad \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr} \quad \forall\, p, q, r \in A\,.$$

Упражнение 6.17. Убедитесь, что $\overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}$ и что $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs} \iff \overrightarrow{ps} = \overrightarrow{qr}$.

Параллельный перенос τ_v можно воспринимать как операцию «откладывания» фиксированного вектора $v \in V$ от всевозможных точек $p \in A$, и мы часто будем писать $p + v$ вместо $\tau_v(p)$.

Пример 6.13
Множество всех многочленов степени m со старшим коэффициентом 1 представляет собою аффинное пространство над векторным пространством $\Bbbk[x]_{\leqslant(m-1)}$ всех многочленов степени не выше $m - 1$.

Упражнение 6.18. Докажите это.

Отметим, что размерность этого аффинного пространства равна m.

6.5.1. Аффинизация и векторизация. Из всякого векторного пространства V можно изготовить аффинное пространство $\mathbb{A}(V)$, точками которого являются «концы» *радиус векторов* $v \in V$, отложенных от нуля. Оно называется *аффинизацией* векторного пространства V. Формально, точками пространства $\mathbb{A}(V)$, по определению, являются векторы пространства V, а параллельный перенос $\tau_w : \mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$ переводит v в $v + w$.

Упражнение 6.19. Убедитесь, что свойства (6-24) и (6-25) выполняются.

Наоборот, если в произвольном аффинном пространстве A над V зафиксировать какую-нибудь «начальную» точку p и сопоставить каждой точке $q \in A$ вектор $\overrightarrow{pq} \in V$, мы, согласно (6-25), получим биекцию между точками из A и векторами из V. Эта биекция называется *векторизацией* аффинного пространства A с *началом* (или с *центром*) в точке $p \in A$. Набор $p,\ e_1, e_2, \dots, e_n$, где $p \in A$, а $e_1, e_2, \dots, e_n$ — какой-нибудь базис в V, называется *аффинной системой координат* (или *репером*) в пространстве A. Коэффициенты разложения вектора $\overrightarrow{pq}$ по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ называются *аффинными координатами* точки q относительно репера $p,\ e_1, e_2, \dots, e_n$.

6.5.2. Аффинные подпространства. Пусть A является аффинным точечным пространством над векторным пространством V. Для любой точки $p \in A$ и любого векторного подпространства $U \subset V$ множество точек

$$\Pi(p, U) = p + U = \{\tau_u(p) \mid u \in U\}$$

называется *аффинным подпространством.* Векторное подпространство U называется в этом случае *направляющим подпространством* аффинного пространства $\Pi(p, U)$, а его размерность $\dim U$ называется *размерностью* аффинного пространства $\Pi(p, U)$.

Пример 6.14 (прямые и плоскости)
Аффинные подпространства $p + U$, где $\dim U = 1, 2$ называются *прямыми* и *плоскостями* соответственно. Таким образом, аффинная прямая представляет собою ГМТ вида $p + vt$, где p — некоторая точка, v — ненулевой вектор, а t пробегает $\Bbbk$. Аналогично, аффинная плоскость есть ГМТ вида $p + \lambda u + \mu w$, где p — некоторая точка, u, w — пара непропорциональных векторов, а λ, μ независимо пробегают $\Bbbk$.

Предложение 6.4
Следующие условия на аффинные подпространства $\Pi(p, U)$ и $\Pi(q, U)$ с одним и тем же направляющим подпространством $U \subset V$ равносильны друг другу:

$$1)\ \overrightarrow{pq} \in U \qquad 2)\ \Pi(p, U) = \Pi(q, U)$$
$$3)\ \Pi(p, U) \cap \Pi(q, U) \neq \varnothing \qquad 4)\ p \in \Pi(q, U) \qquad 5)\ q \in \Pi(p, U)\,.$$

Доказательство. Покажем, что из (1) следует (2). Если $\overrightarrow{pq} \in U$, то любая точка вида $q + u$ с $u \in U$ может быть записана в виде $p+w$ с $w = \overrightarrow{pq}+u \in U$, и обратно, любая точка вида $p+w$ с $w \in U$ может быть записана в виде $p + u$ с $u = w - \overrightarrow{pq} \in U$. Тем самым, $\Pi(p, U) = \Pi(q, U)$.

Если выполнено (2), то тем более выполнены (3), (4), (5), а выполнение условий (4) или (5) автоматически означает выполнение условия (3). Таким образом, для завершения доказательства достаточно проверить, что из (3) вытекает (1).

Пусть точка $r = p + u' = q + u'' \in \Pi(p, U) \cap \Pi(q, U)$, где $u' = \overrightarrow{pr}$ и $u'' = \overrightarrow{qr}$ лежат в U. Тогда и $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pr} + \overrightarrow{rq} = u' - u'' \in U$. □

Предложение 6.5
Следующие условия на $k + 1$ точек $p_0, p_1, \dots, p_k$ любого аффинного пространства A над произвольным векторным пространством V равносильны друг другу:

1) точки $p_0, p_1, \dots, p_k$ не содержатся ни в каком $(k - 1)$-мерном аффинном подпространстве
2) векторы $\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}, \dots, \overrightarrow{p_0p_k}$ линейно независимы
3) через $p_0, p_1, \dots, p_k$ проходит единственное k-мерное аффинное подпространство

Доказательство. Покажем, что (1) равносильно (2). Линейная зависимость k векторов из (2) равносильна тому, что их линейная оболочка имеет размерность не больше $k - 1$, что в свою очередь означает, что в V найдётся $(k - 1)$-мерное векторное подпространство U, содержащее все векторы $\overrightarrow{p_0p_i}$. По предл. 6.4 последнее означает, что $(k - 1)$-мерное аффинное подпространство $p_0 + U$ содержит все точки p_i.

Покажем, что (2) равносильно (3). По предл. 6.4 прохождение аффинного пространства $p_0 + U$ через все точки p_i означает, что все векторы $\overrightarrow{p_0p_i}$ содержатся в U. А линейная независимость этих векторов означает, что они составляют базис в любом содержащем их k-мерном подпространстве $U \subset V$, а значит, любое такое подпространство представляет собою их линейную оболочку. □

Предложение 6.6
Если векторное подпространство $U \subset V$ является множеством решений системы однородных линейных уравнений $\xi(x) = 0$, где ξ пробегает некоторое подмножество $M \subset V^*$, то аффинное подпространство $\Pi(p, U) = p + U \subset \mathbb{A}(V)$ является множеством решений системы неоднородных линейных уравнений вида $\xi(x) = \xi(p)$, где ξ пробегает то же самое подмножество $M \subset V^*$. Наоборот, всякая система неоднородных линейных уравнений на переменную точку $x \in \mathbb{A}(V)$ вида $\xi(x) = c_\xi$, где ξ пробегает какое-нибудь подмножество $M \subset V^*$, а $c_\xi \in \Bbbk$ — некоторые константы, либо несовместна, либо множество её решений представляет собою аффинное подпространство вида $p + U$, где $U = \operatorname{Ann} M \subset V$, а p — любое фиксированное решение системы (т. е. такая точка p, что $\xi(p) = c_\xi$ для всех $\xi \in M$).

Доказательство. В силу линейности функций $\xi : V \to \Bbbk$ уравнения $\xi(x) = \xi(p)$ и $\xi(\overrightarrow{px}) = 0$ равносильны друг другу. □

6.6. Фактор пространства. Со всяким подпространством $U \subset V$ связано разбиение пространства V на *смежные классы* подпространства U

$$[v]_U = v \,(\mathrm{mod}\, U) = v + U = \{w \in V \mid w - v \in U\}$$

которые представляют собой классы эквивалентности по отношению $v \underset{U}{\sim} w$, означающему, что $w - v \in U$. Сложение классов и их умножение на числа определяются обычными формулами $[v] + [w] = [v + w]$ и $\lambda[v] = [\lambda v]$.

Упражнение 6.20. Проверьте, что эти определения корректны и задают на множестве классов структуру векторного пространства над полем $\Bbbk$.

Пространство смежных классов подпространства U обозначается V/U и называется *фактор пространством* пространства V по подпространству U. Отображение факторизации $V \twoheadrightarrow V/U$, переводящее каждый вектор $v \in V$ в его класс $[v]$, линейно и сюрьективно.

Иначе смежный класс $[v]$ вектора $v \in V$ по подпространству $U \subset V$ можно воспринимать как проходящее через точку $v \in \mathbb{A}(V)$ параллельно подпространству $U \subset V$ аффинное подпространство в аффинизации $\mathbb{A}(V)$ пространства V: $[v] = v + U = \Pi(v, U) \subset \mathbb{A}(V)$. Таким образом, векторы фактор пространства V/U биективно соответствуют аффинным подпространствам в $\mathbb{A}(V)$ с заданным направляющим подпространством $U \subset V$.

Пример 6.15 (фактор по ядру)
Каждый линейный оператор $F : V \to W$ задаёт канонический изоморфизм

$$V/\ker F \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} F\,,$$

сопоставляющий классу $[v] \in V/\ker F$ вектор $F(v) \in \operatorname{im} F$. Это переформулировка того, что

$$F(v) = F(w) \iff v - w \in \ker F\,.$$

Следствие 6.9
Если векторы $v_1, v_2, \dots, v_k$ дополняют некоторый базис $u_1, u_2, \dots, u_m$ подпространства U до базиса во всём пространстве $V \supset U$, то их классы $[v_1]$, $[v_2]$, … , $[v_k]$ образуют базис фактор пространства V/U. В частности, $\dim U + \dim V/U = \dim V$.

Доказательство. Это частный случай предл. 6.1 на стр. 90 (и её доказательства), относящийся к отображению факторизации $V \twoheadrightarrow V/U$. □

Пример 6.16 (линейная оболочка как фактор)
Линейная оболочка $W = \operatorname{span}(w_1, w_2, \dots, w_n) \subset V$ любого набора из n векторов w_i произвольного пространства V является образом линейного оператора $F : \Bbbk^n \to V$, переводящего стандартный базисный вектор $e_i \in \Bbbk^n$ в вектор $w_i \in W$. Ядро этого оператора $U = \ker F \subset \Bbbk^n$ представляет собою *пространство линейных соотношений* между векторами w_i в W в том смысле, что вектор $u = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n \in \Bbbk^n$ лежит в U тогда и только тогда, когда $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_n w_n = 0$ в W. Изоморфизм $W = \operatorname{im} F \simeq \Bbbk^n/U$ из предыдущего прим. 6.15 означает в этом случае, что векторы $w \in W$ суть классы вычетов линейных комбинаций $x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_n w_n$ по модулю тех комбинаций, которые являются линейными зависимостями между векторами w_i.

Предложение 6.7
Для любого r-мерного подпространства $U \subset \Bbbk^n$ существует такое разбиение стандартного базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ координатного пространства $\Bbbk^n$ на два непересекающихся подмножества

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r}\} \sqcup \{e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_{n-r}}\}, \tag{6-26}$$

что натянутые на них дополнительные друг другу координатные подпространства

$$E_I = \operatorname{span}(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_r}) \simeq \Bbbk^r \quad \text{и} \quad E_J = \operatorname{span}(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_{n-r}}) \simeq \Bbbk^{n-r},$$

удовлетворяют условиям:

1) $U \cap E_J = 0$
2) факторизация $\Bbbk^n \twoheadrightarrow \Bbbk^n / U$ изоморфно отображает E_J на $\Bbbk^n / U$
3) проекция $c_I : \Bbbk^n \twoheadrightarrow E_I$ вдоль E_J изоморфно отображает U на E_I
4) в U найдётся r векторов $u_1, u_2, \dots, u_r$ вида $u_\nu = e_{i_\nu} + w_\nu$, где $w_\nu \in E_J$.

Выполнение любого из этих условий влечёт за собою выполнение всех остальных, причём для заданных подпространства U и разбиения базиса в $\Bbbk 6n$, удовлетворяющего условиям (1) – (4), набор векторов u_i, о котором идёт речь в (4), единственен и является базисом в U.

Доказательство. Существование разбиения вытекает из леммы о замене[1]: для любого базиса $w_1, w_2, \dots, w_r$ в пространстве U в стандартном базисе пространства $\Bbbk^n$ некоторые r векторов можно заменить на векторы w_i так, что оставшиеся векторы e_{j_1}, e_{j_2}, …, $e_{j_{n-r}}$ вместе с $w_1, w_2, \dots, w_r$ составят базис в $\Bbbk^n$. Это означает, что линейная оболочка E_J векторов e_{j_1}, e_{j_2}, …, $e_{j_{n-r}}$ удовлетворяет условию (1).

Покажем, что условия (1) – (4) эквивалентны друг другу. Из (1) следует, что пространство U имеет нулевое пересечение с ядром проекции $c_I : \Bbbk^n \twoheadrightarrow E_J$, а пространство E_J — с ядром факторизации $\Bbbk^n \twoheadrightarrow \Bbbk^n / U$. Поэтому ограничение этой факторизации на подпространство E_J и ограничение проекции вдоль E_J на подпространство U инъективны. Из соображений размерности оба этих ограничения — изоморфизмы. Наоборот, каждое из условий (2), (3) влечёт трансверсальность соответствующего пространства ядру рассматриваемого отображения, т. е. условие (1). Условие (4) говорит, что $c_I(u_\nu) = e_{i_\nu}$. Если это так, то c_I изоморфизм. Наоборот, если c_I изоморфизм, то векторы $u_\nu \in U$, проектирующиеся в базисные векторы e_{i_ν} пространства E_I существуют, единственны и образуют базис в U. □

Замечание 6.3. Для заданного подпространства $U \subset \Bbbk^n$ разбиение пространства $\Bbbk^n$ в прямую сумму дополнительных координатных подпространств E_I и E_J, такое что U изоморфно проектируется на E_I вдоль E_J как правило не единственно: над бесконечным полем $\Bbbk$ случайно взятое подпространство $U \subset \Bbbk^n$ почти наверняка изоморфно проектируется *на каждое* из $\binom{n}{r}$ r-мерных координатных подпространств E_I, так что условия лем. 7.2 оказываются выполненными для любого разбиения.

[1] см. лем. 6.2 на стр. 88

Упр. 6.1. Пусть $0 \cdot v = w$. Тогда $w + v = 0 \cdot v + 1 \cdot v = (0 + 1) \cdot v = 1 \cdot v = v$. Прибавляя к обеим частям этого равенства $-v$, получаем $w = 0$. Из равенства $0 \cdot v = 0$ вытекает, что $\lambda \cdot 0 = \lambda(0 \cdot v) = (\lambda \cdot 0) \cdot v = 0 \cdot v = 0$. Наконец, равенство $(-1) \cdot v + v = (-1) \cdot v + 1 \cdot v = ((-1) + 1) \cdot v = 0 \cdot v = 0$ означает, что $(-1) \cdot v = -v$.

Упр. 6.3. По индукции проверяется, что каждый моном x^m (где $m = 0, 1 \dots , n$) линейно выражается через многочлены $f_0, f_1, \dots , f_m$, а значит, и любой многочлен степени $\leqslant m$ линейно выражается через $f_0, f_1, \dots , f_m$. Для доказательства единственности такого выражения заметим, что в равенстве $\sum \lambda_i f_i = \sum \mu_i f_i$ старший моном x^n появляется в обеих частях только из многочлена f_n. Поэтому сравнение коэффициента при x^n в обеих частях приводит к равенству $\lambda_n = \mu_n$. Вычитая из обеих частей $\lambda_n f_n = \mu_n f_n$, получаем равенство между многочленами меньшей степени, к которому применимо то же рассуждение.

Упр. 6.4. Пространство со счётным базисом равномощно множеству конечных слов, составленных из элементов основного поля, а пространство рядов равномощно множеству бесконечных последовательностей элементов основного поля, которое строго более мощно, чем множество конечных слов.

Упр. 6.6. Ответ: нет из соображений размерности.

Упр. 6.7. Пусть какая-то конечная линейная комбинация векторов из объединения всех наборов обратилась в нуль. Каждый вектор из этой комбинации лежит в одном из наборов цепочки, а значит, и все они лежат в одном из наборов цепочки (том, что содержит остальные — такой существует, поскольку про любые два набора цепочки известно, что один из них является подмножеством другого). Так как каждый набор из цепочки предполагался линейно независимым, все коэффициенты этой линейной комбинации нулевые.

Упр. 6.8. Рассмотрим множество всех пар (G, E), таких что $G \subset \mathcal{G}$, $E \subset \mathcal{E}$, G равномощно E, и после замены в $\mathcal{G}$ векторов из G на векторы из E набор остаётся порождающим. Первый шаг доказательства лем. 6.2 показывает, что это множество пар непусто. Введём на нём частичный порядок, полагая $(G, E) \leqslant (G', E')$, если $G \subset G'$ и $E \subset E'$. Поскольку любая линейно упорядоченная цепочка пар мажорируется парой, у которой G- и E-множества являются объединениями всех G- и E-множеств рассматриваемой цепочки, по лемме Цорна найдётся пара (G, E), не содержащаяся строго ни в какой большей паре. Если при этом $E \neq \mathcal{E}$, то же рассуждение, что и в доказательстве лем. 6.2 позволит добавить к множествам G и E ещё по одному элементу, что противоречит максимальности пары (G, E).

Упр. 6.11. Это частный случай предл. 7.2 на стр. 102.

Упр. 6.12. Это следует из теор. 7.1 на стр. 103.

Упр. 6.13. Пусть $W \not\subseteq U$ два подпространства в V. Выберем вектор $w \in W \smallsetminus U$. Если $W \cup U$ — подпространство, то $\forall u \in U \;\; w + u \in W \cup U$. Поскольку $w + u \notin U$ (т. к. $w \notin U$), $w + u \in W$, откуда $u \in W$, т. е. $U \subset W$.

Упр. 6.14. Каждый вектор $w \in V$ представляется в виде $w = \frac{\xi(w)}{\xi(v)} \cdot v + u$, где $u = w - \frac{\xi(w)}{\xi(v)} \cdot v$ лежит в $\ker \xi$, поскольку $\xi\left(w - \frac{\xi(w)}{\xi(v)} \cdot v\right) = \xi(w) - \frac{\xi(w)}{\xi(v)} \cdot \xi(v) = 0$.

Упр. 6.15. Индукция по числу подпространств с использованием разобранного перед этим случая двух подпространств.

Упр. 6.16. Поскольку каждый вектор $v \in V$ имеет единственное представление в виде $v = \sum u_i$ с $u_i \in U_i$, гомоморфизм *сложения* $\oplus U_i \to V$, $(u_1, u_2, \dots, u_m) \mapsto \sum u_i$, биективен.

Упр. 6.20. Все проверки проводятся дословно также, как для классов вычетов по модулю идеала (ср. с упр. 5.7).