§9. Определители

9.1. Объём и полилинейные косые формы. Интуитивным геометрическим критерием линейной зависимости набора векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$ в n-мерном векторном пространстве V является обращение в нуль *объёма* параллелепипеда, для которого эти векторы составляют множество рёбер, исходящих из одной вершины (см. рис. 9◇1). Не ставя себе задачу определить объём сколь-нибудь общей фигуры, отметим, что объём параллелепипеда, как бы он ни определялся, должен обладать следующими двумя геометрическими свойствами: во-первых, он не должен меняться при сохраняющем высоту «параллельном перекосе» параллелепипеда вдоль любой из сторон в плоскости любой примыкающей к этой стороне двумерной грани[1], как на рис. 9◇2.

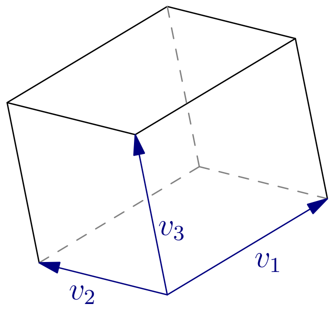

Рис. 9◇1. Параллелепипед.

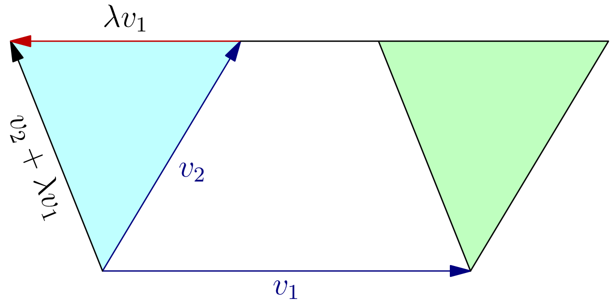

Рис. 9◇2. Параллельный перекос.

во-вторых при растяжении одной из сторон параллелепипеда в λ раз объём должен умножаться[2] на λ. Оказывается, что эти свойства *определяют* объём параллелепипеда однозначно с точностью до постоянного множителя (см. сл. 9.3 ниже).

Определение 9.1

Функция $\omega : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to \Bbbk$, сопоставляющая каждому упорядоченному набору векторов $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ n-мерного векторного пространства V над полем $\Bbbk$ число $\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) \in \Bbbk$, называется *формой n-мерного объёма* (или *ориентированным n-мерным объёмом*) на пространстве V, если она удовлетворяет следующим двум свойствам:

1) объём не меняется при добавлений к одному из аргументов произвольной кратности любого другого: $\omega\left(\dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots\right) = \omega\left(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots\right)$

2) при умножении одного из аргументов на число объём умножается на это число: $\omega(\dots, \lambda v_i, \dots) = \lambda\, \omega(\dots, v_i, \dots)$

(в обеих формулах все отмеченные многоточием аргументы в левой и в правой части равенства остаются без изменений).

---

[1]на рис. 9◇2 изображена параллельная проекция происходящего на плоскость той грани, в которой совершается «перекос», вдоль дополнительного к этой грани $(n-2)$-мерного подпространства, натянутого на все остальные рёбра; видно, что «отрезаемая» слева призма параллельно переносится вправо и «прикладывается» к параллелепипеду с другой стороны

[2]например, при удвоении любой стороны объём удваивается

Лемма 9.1
На любом векторном пространстве размерности n над произвольным полем $\Bbbk$ всякая форма n-мерного объёма обращается в нуль, если аргументы линейно зависимы (в частности, когда среди аргументов есть совпадающие и/или нулевые), линейна каждому из своих аргументов при фиксированных остальных:

$$\omega\,(\,\dots\,,\,\lambda v+\mu w,\,\dots\,)=\lambda\,\omega\,(\,\dots\,,\,v,\,\dots\,)+\mu\,\omega\,(\,\dots\,,\,w,\,\dots\,) \tag{9-1}$$

и меняет знак при перестановке любых двух аргументов местами:

$$\omega(\dots,v,\,\dots,w,\,\dots)=-\omega(\dots,w,\,\dots,v,\,\dots)\,. \tag{9-2}$$

Доказательство. Если векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$ линейно зависимы, то один из них выражается через остальные. Пусть, например, $v_1 = \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$. Тогда

$$\begin{aligned}\omega(v_1,v_2,\dots,v_n)&=\omega(v_1-\lambda_2v_2-\dots-\lambda_nv_n,\,v_2,\,\dots\,,\,v_n)=\\&=\omega(0,v_2,\,\dots\,,\,v_n)=\omega(0\cdot 0,v_2,\,\dots\,,\,v_n)=0\cdot\omega(0,v_2,\,\dots\,,\,v_n)=0\,.\end{aligned}$$

Для доказательства линейности заметим, что если оба набора аргументов в правой части (9-1) линейно зависимы, то набор аргументов в левой части тоже линейно зависим, и стало быть, обе части равенства нулевые. Поэтому мы можем без ограничения общности считать, что аргументы первого слагаемого правой части образуют базис пространства V. Разложение w по этому базису имеет вид $w=\varrho v+u$, где u является линейной комбинацией остальных $(n-1)$ аргументов. По первому свойству объёма левая часть (9-1) равна $\omega\,(\,\dots\,,\,\lambda v+\mu w,\,\dots\,)=\omega\,(\,\dots\,,\,(\lambda+\mu\varrho)v+\mu u,\,\dots\,)=\omega\,(\,\dots\,,\,(\lambda+\mu\varrho)v,\,\dots\,)$, а второе слагаемое правой части (9-1) равно $\mu\omega\,(\,\dots\,,\,w,\,\dots\,)=\mu\omega\,(\,\dots\,,\,\varrho v+u,\,\dots\,)=\mu\omega\,(\,\dots\,,\,\varrho v,\,\dots\,)$. Тем самым, вся правая часть $\lambda\omega\,(\,\dots\,,\,v,\,\dots\,)+\mu\omega\,(\,\dots\,,\,\varrho v,\,\dots\,)=(\lambda+\mu\varrho)\,\omega\,(\,\dots\,,\,v,\,\dots\,)$ совпадает с левой. Равенство (9-2) вытекает из линейности объёма и его обращения в нуль при совпадении любых двух аргументов: $0=\omega(\dots,v+w,\,\dots,v+w,\,\dots)=\omega(\dots,v,\,\dots,v,\,\dots)+$ $+\,\omega(\dots,v,\,\dots,w,\,\dots)+\omega(\dots,w,\,\dots,v,\,\dots)+\omega(\dots,w,\,\dots,w,\,\dots)=\omega(\dots,v,\,\dots,w,\,\dots)+$ $+\,\omega(\dots,w,\,\dots,v,\,\dots)$. □

Определение 9.2
Пусть K — произвольное коммутативное кольцо, и V — любой K-модуль. Отображение $\omega : V\times V\times\dots\times V\to K$ называется *полилинейной*[1] *косой формой*, если оно линейно по каждому аргументу при фиксированных остальных и обращается в нуль всякий раз, когда какие-нибудь из два из аргументов совпадают друг с другом.

Пример 9.1 (форма объёма)
Согласно лем. 9.1 всякая форма объёма на n-мерном векторном пространстве V является n-линейной косой формой. Обратное тоже верно: любая полилинейная косая форма от n аргументов является формой объёма, т. е. удовлетворяет двум условиям из опр. 9.1 на стр. 130. Действительно, второе свойство составляет часть линейности, а первое вытекает из линейности и кососимметричности:

$$\begin{aligned}&\omega\,(\,\dots\,,\,v_i+\lambda v_j,\,\dots\,,\,v_j,\,\dots\,,\,)=\\&\qquad=\omega\,(\,\dots\,,\,v_i,\,\dots\,,\,v_j,\,\dots\,,\,)+\lambda\,\omega\,(\,\dots\,,\,v_j,\,\dots\,,\,v_j,\,\dots\,,\,)=\\&\qquad\qquad=\omega\,(\,\dots\,,\,v_i,\,\dots\,,\,v_j,\,\dots\,,\,)\,.\end{aligned}$$

[1] *или, точнее, m-линейной, когда число аргументов у ω равно m*

9.2. Знак перестановки. В доказательстве лем. 9.1 мы видели, что из полилинейности и кососимметричности вытекает *знакопеременность*: каждая полилинейная косая форма «меняет знак» при перестановке двух аргументов местами:

$$\omega(\dots, v, \dots, w, \dots) = -\omega(\dots, w, \dots, v, \dots).$$

Если $1+1$ не делит нуль в K, то и наоборот, из знакопеременности полилинейной формы вытекает её кососимметричность: $\omega(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0$.

Следуя прим. 1.6 на стр. 14, будем воспринимать каждую перестановку

$$g = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in S_n$$

элементов набора $(1, 2, \dots, n)$ как биективное отображение из множества $\{1, 2, \dots, n\}$ в себя, переводящее элемент i в элемент g_i. Например, перестановка $(2, 4, 3, 5, 1)$ пяти чисел $1, 2, 3, 4, 5$ соответствует отображению $1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 4,\ 3 \mapsto 3,\ 4 \mapsto 5,\ 5 \mapsto 1$. Композиция fg перестановок $f, g \in S_n$ действует по правилу $fg : i \mapsto f\big(g(i)\big)$: например, в группе S_5 перестановки $f = (2, 4, 3, 5, 1)$ и $g = (3, 2, 1, 5, 4)$ имеют композиции $fg = (3, 4, 2, 1, 5)$ и $gf = (2, 5, 1, 4, 3)$.

Перестановка, которая меняет между собою местами какие-нибудь два элемента i и j, а все остальные элементы $k \neq i, j$ оставляет на месте, называется *транспозицией* элементов i и j и обозначается σ_{ij}.

Упражнение 9.1. Убедитесь, что каждая перестановка является композицией транспозиций.

Перестановки, представимые в виде композиции чётного числа транспозиций, называются *чётными*, а перестановки, раскладывающиеся в композицию нечётного числа транспозиций — *нечётными*.

Разложение перестановки в композицию транспозиций *не единственно*: например, $\sigma_{13} = (3, 2, 1) \in S_3$ можно получить и как $\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}$, и как $\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}$. Однако, не смотря на эту неоднозначность, чётность перестановки корректно определена в том смысле, что одну и ту же перестановку нельзя представить в виде композиции как чётного, так и нечётного числа транспозиций. Это открывает возможность существования ненулевых косых форм: если бы имелась перестановка, одновременно являющаяся как чётной, так и нечётной, то любая знакопеременная форма обязана была бы обращаться в нуль на любом наборе векторов.

Чтобы убедиться в том, что чётность перестановки не зависит от выбора её разложения в композицию транспозиций, мы укажем другой способ определения чётности, не использующий такового разложения. Назовём упорядоченную пару чисел (i, j), в которой $1 \leqslant i < j \leqslant n$, *инверсной парой* перестановки $g \in S_n$, если $g(i) > g(j)$. Таким образом, каждая перестановка $g \in S_n$ разбивает множество всех $n(n-1)/2$ пар (i, j) с $1 \leqslant i < j \leqslant n$ на два непересекающихся подмножества — инверсные пары и неинверсные пары.

Лемма 9.2
Чётность числа инверсных пар каждой перестановки совпадает с чётностью количества транспозиций, на которые её можно разложить.

Доказательство. Для любой перестановки g и любой транспозиции σ_{ij} чётность числа инверсных пар у перестановок g и $g\sigma_{ij}$ различна. В самом деле, перестановки

$$\begin{aligned} g &= \left(g_1,\ \dots\ ,\ g_{i-1},\ \boldsymbol{g_i},\ g_{i+1},\ \dots\ ,\ g_{i-1},\ \boldsymbol{g_j},\ g_{j+1},\ \dots\ ,\ g_n\right) \\ g\sigma_{ij} &= \left(g_1,\ \dots\ ,\ g_{i-1},\ \boldsymbol{g_j},\ g_{i+1},\ \dots\ ,\ g_{i-1},\ \boldsymbol{g_i},\ g_{j+1},\ \dots\ ,\ g_n\right) \end{aligned} \tag{9-3}$$

отличаются друг от друга транспозицией элементов $g_i = g(i)$ и $g_j = g(j)$, стоящих на i-том и j-том местах, и наше утверждение вытекает из следующего упражнения:

Упражнение 9.2. Проверьте, что у двух перестановок (9-3) пара (i, j), а также $2(j-i-1)$ пар вида (i, m) и (m, j) с произвольным m из промежутка $i < m < j$ имеют противоположную инверсность[1], а инверсность всех остальных пар одинакова.

Таким образом, если перестановка g разложена в композицию транспозиций, то чётность числа инверсных пар в ней отличается от чётности числа инверсных пар в тождественной перестановке в точности на чётность числа транспозиций, на которые разложена g. □

Следствие 9.1 (знак перестановки)
Существует единственное отображение $\operatorname{sgn} : S_n \twoheadrightarrow \{+1, -1\}$ со свойствами: $\operatorname{sgn}(\mathrm{Id}) = 1$, $\operatorname{sgn}(\sigma_{ij}) = -1$ для всех транспозиций σ_{ij} и $\operatorname{sgn}(fg) = \operatorname{sgn}(f) \cdot \operatorname{sgn}(g)$ для всех $f, g \in S_n$. Это отображение корректно определяется формулой

$$\operatorname{sgn}(g_1, g_2, \dots, g_n) = \begin{cases} +1 & \text{если перестановка } (g_1, g_2, \dots, g_n) \text{ чётна} \\ -1 & \text{если перестановка } (g_1, g_2, \dots, g_n) \text{ нечётна}\,. \end{cases} \tag{9-4}$$

Пример 9.2 (правило ниточек)
Интерпретация чётности перестановки как чётности числа инверсных пар даёт практический способ отыскания чётности перестановки — возможно, не самый быстрый[2], но всё же полезный в некоторых ситуациях, с которыми мы далее столкнёмся. Напишем исходные числа и их перестановку друг под другом, как на рис. 9◇3, и соединим одинаковые числа нитями так, чтобы ни одна из нитей не вылезала за пределы прямоугольника, образованного четырьмя угловыми числами, и чтобы все точки пересечения нитей были простыми двойными[3]. Тогда чётность числа инверсных пар будет равна чётности числа точек пересечения нитей.

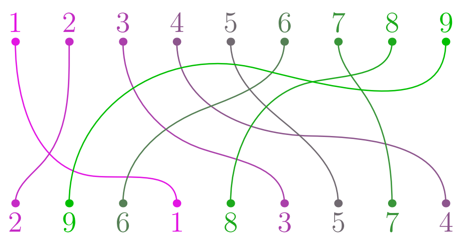

Рис. 9◇3. $\operatorname{sgn}(2,\ 9,\ 6,\ 1,\ 8,\ 3,\ 5,\ 7,\ 4) = +1$ (всего 18 пересечений).

---

[1] т. е. если такая пара инверсна в g, то она не инверсна в $\sigma_{ij}g$ и наоборот

[2] обычно быстрее бывает разложить перестановку в композицию непересекающихся циклов и воспользоваться тем, что циклы чётной длины нечётны, а циклы нечётной длины чётны

[3] это означает, что в каждой точке пересечения встречается ровно две нити, причём пересечение происходит трансверсально: ✗, а не по касательной:)(

Упражнение 9.3. Докажите это и найдите при помощи правила ниточек чётность *тасующей перестановки* $(i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_m)$, в которой наборы номеров $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ и $(j_1, j_2, \dots, j_m)$ не пересекаются, и каждый из них строго возрастает слева направо.

Теорема 9.1
Для любого коммутативного кольца K с единицей на координатном модуле K^n существует единственная с точностью до пропорциональности ненулевая косая форма от n аргументов. Её значение на произвольном наборе векторов $v = e \cdot C_{ev}$, где матрица $C_{ev} = (c_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ имеет в j-том столбце координаты вектора v_j в стандартном базисе e координатного модуля K^n, вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} \omega(v_1, v_2, \dots, v_n) &= \omega(e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot \det\left(c_{ij}\right), \quad \text{где} \\ \det\left(c_{ij}\right) &= \sum_g \mathrm{sgn}(g_1, g_2, \dots, g_n) \cdot c_{g_1 1} c_{g_2 2} \cdots c_{g_n n} \end{aligned} \tag{9-5}$$

и суммирование происходит по всем перестановкам $g = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in S_n$.

Доказательство. Подставим в $\omega(v_1, v_2, \dots, v_m)$ разложения $v_j = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i \cdot c_{ij}$ и воспользуемся полилинейностью:

$$\begin{aligned} \omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = \omega\Big(\sum_{i_1} e_{i_1} c_{i_1 1}, \sum_{i_2} e_{i_2} c_{i_2 2}, \dots, \sum_{i_n} e_{i_n} c_{i_n n} \Big) = \\ = \omega\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}\right) \cdot \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} c_{i_1 1} \cdot c_{i_2 2} \cdot \ \cdots \ \cdot c_{i_n n}. \end{aligned}$$

Так как при совпадении двух аргументов ω обращается в нуль, ненулевой вклад в последнюю сумму вносят только наборы $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, в которых каждое из чисел $1, 2, \dots, n$ встречается ровно один раз, причём

$$\omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) = \begin{cases} +\omega(e_1, e_2, \dots, e_n) & \text{если перестановка } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ чётна} \\ -\omega(e_1, e_2, \dots, e_n) & \text{если перестановка } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ нечётна} \end{cases}$$

что и даёт формулу (9-5). Из неё следует, что существует самое большее одна n-линейная косая форма ω_1 на K^n, принимающая на стандартном базисе e значение 1, а на произвольном наборе векторов $v = eC_{ev}$ — значение

$$\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det(v_1, v_2, \dots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} \det C_{ev}, \tag{9-6}$$

где C_{ev} — квадратная матрица размера $n \times n$, в j-том столбце которой записаны координаты вектора v_j в базисе e. При этом для любой n-линейной косой формы ω на K^n и любого набора векторов $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ выполняется равенство:

$$\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = \omega_1(v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot \omega(e_1, e_2, \dots, e_n),$$

означающее, что форма $\omega = \lambda \cdot \omega_1$ пропорциональна форме ω_1 с коэффициентом $\lambda = \omega(e_1, e_2, \dots, e_n) \in K$. Для завершения доказательства остаётся проверить, что формула (9-6) действительно задаёт полилинейную косую форму на K^n, т. е. что функция

$$\det : \mathrm{Mat}_n(K) \to K$$

является полилинейной косой формой от столбцов матрицы. Мы сделаем это в предл. 9.1 ниже. □

9.3. Определитель. Стоящее в правой части равенства (9-5) выражение

$$\det C = \det(v_1, v_2, \dots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) \cdot c_{g_1 1} c_{g_2 2} \cdots c_{g_n n} \tag{9-7}$$

называется *определителем* квадратной матрицы $C = \left(c_{ij}\right) \in \operatorname{Mat}_n(K)$ или набора векторов $v_1, v_2, \dots, v_n \in K^n$, образующих столбцы матрицы C. Для вычисления определителя следует всеми возможными способами выбирать из матрицы n-ки элементов так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце выбиралось ровно по одному элементу. Выбранные n элементов перемножаются и полученные таким образом $n!$ произведений складываются с надлежащими знаками, которые определяются так: множество клеток, где стоят выбранные элементы, представляет собою график биективного отображения $j \mapsto g_j$ из множества номеров столбцов в множество номеров строк, и произведению приписывается знак этой перестановки.

Например, определители матриц размера 2×2 и 3×3 имеют вид

$$\det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \tag{9-8}$$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = c_{11}c_{22}c_{33} + c_{13}c_{21}c_{32} + c_{12}c_{23}c_{31} - \\ - c_{11}c_{23}c_{32} - c_{13}c_{22}c_{31} - c_{12}c_{21}c_{33} \end{aligned} \tag{9-9}$$

(во втором равенстве сначала выписаны тождественная и две циклических перестановки, потом — три транспозиции).

Предложение 9.1
Определитель $\det C = \det(v_1, v_2, \dots, v_n)$ линеен по каждому столбцу матрицы C, кососимметричен, и $\det C^t = \det C$ где $C^t = \left(c^t_{ij}\right)$ — матрица, транспонированная[1] к $C = \left(c_{ij}\right)$.

Доказательство. Каждое из складываемых в формуле (9-7) произведений содержит ровно по одному сомножителю из каждого столбца и, стало быть, линейно по каждому столбцу. Поэтому линейна и их сумма. Это доказывает первое утверждение. Если i-тый столбец матрицы C совпадает с j-тым, то составляющие сумму (9-7) произведения разбиваются на отвечающие перестановкам g и $g\sigma_{ij}$ пары вида[2]

$$\operatorname{sgn}(g) \cdot c_{g_1 1} \cdots c_{g_i i} \cdots c_{g_j j} \cdots c_{g_n n} \quad \text{и} \quad \operatorname{sgn}(g\sigma_{ij}) \cdot c_{g_1 1} \cdots c_{g_j i} \cdots c_{g_i j} \cdots c_{g_n n} \,,$$

различающиеся только знаком, поскольку $c_{g_i i} = c_{g_i j}$ и $c_{g_j j} = c_{g_j i}$. Стало быть, сумма получится нулевой. Наконец, равенство $\det C^t = \det C$ вытекает из того, что набор произведений n-ок матричных элементов в разложениях $\det C$ и $\det C^t$ одинаков, а знаки, с которыми каждое произведение входит в $\det C$ и $\det C^t$, суть знаки обратных друг другу перестановок.

Упражнение 9.4. Покажите, что обратные друг другу перестановки имеют одинаковую чётность.

[1] так что $c^t_{ij} = c_{ji}$

[2] ср. с форм. (9-3) на стр. 133

Таким образом, разложения (9-7) для $\det C$ и $\det C^t$ состоят из одних и тех же слагаемых с одними и теми же знаками. □

Следствие 9.2
Определитель матрицы является полилинейной кососимметричной формой от её строк.

Следствие 9.3
На любом конечномерном векторном пространстве над любым полем существует единственная с точностью до пропорциональности ненулевая форма объёма ω. Если

$$\omega(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$$

и набор векторов $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ выражаются через набор векторов $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ по формуле $v = eC_{ev}$, то $\omega(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det C_{ev}$.

Предложение 9.2 (мультипликативность определителя)
$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ для любых матриц $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ над любым кольцом K.

Доказательство. Разность $\det(AB) - \det(A) \cdot \det(B)$ представляет собой многочлен с целыми коэффициентами от $2n^2$ переменных a_{ij} и b_{ij}. Достаточно проверить, что этот многочлен нулевой: тогда подставляя в него произвольные элементы произвольного кольца мы получим нуль. Для проверки того, что многочлен $f \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_m]$ нулевой, достаточно установить, что его значение в каждой точке $p \in \mathbb{Q}^m$ нулевое.

Упражнение 9.5. Убедитесь, что над бесконечным полем $\Bbbk$ только нулевой многочлен от m переменных принимает нулевое значение во всех точках пространства $\Bbbk^m$ и покажите, что над конечным полем $\mathbb{F}_q$ это не так.

Таким образом, достаточно доказать предложение для $K = \mathbb{Q}$, что мы и сделаем.

Если столбцы $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{Q}^n$ матрицы A линейно зависимы, то размерность их линейной оболочки меньше n. Поскольку столбцы матрицы AB лежат в линейной оболочке столбцов матрицы A, размерность их линейной оболочки тоже меньше n, и значит, они тоже линейно зависимы. Таким образом, в этом случае $\det A = 0$ и $\det AB = 0$, и равенство $\det A \det B = \det AB$ тривиально выполняется.

Если векторы v_i линейно независимы, то они образуют в $\mathbb{Q}^n$ базис. Зададим на пространстве $\mathbb{Q}^n$ две формы объёма: ω_e, такую что $\omega_e(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$ на элементах стандартного базиса e пространства $\mathbb{Q}^n$, и ω_v, такую что $\omega_v(v_1, v_2, \dots, v_n) = 1$. По сл. 9.3 эти две формы пропорциональны друг другу, и так как $\omega_1(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det A$, коэффициент пропорциональности равен $\det A$:

$$\omega_1 = \det(A) \cdot \omega_v \,. \tag{9-10}$$

Обозначим через $w_1, w_2, \dots, w_n \in \mathbb{Q}^n$ векторы, координаты которых в базисе $v_1, v_2, \dots, v_n$ являются столбцами матрицы B, т. е.

$$(w_1, w_2, \dots, w_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot B = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot AB \,.$$

Тогда по сл. 9.3 $\omega_v(w_1, w_2, \dots, w_n) = \det(B)$, а $\omega_e(w_1, w_2, \dots, w_n) = \det(AB)$, и из (9-10) вытекает требуемое равенство $\det AB = \det A \det B$. □

Следствие 9.4
$\forall\, A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)\;\; \det(AB) = \det(BA)$.

9.3.1. Определитель линейного оператора. Зафиксируем на конечномерном векторном пространстве V форму объёма ω. Для любого линейного оператора $F : V \to V$ форма

$$\omega_F(v_1, v_2, \dots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} \omega\left(Fv_1,\, Fv_2,\, \dots\,,\, Fv_n\right)$$

полилинейна и кососимметрична. Поэтому она пропорциональна форме ω. Коэффициент пропорциональности равен отношению значений этих двух форм на элементах любого базиса $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ пространства V и не зависит от выбора базиса e. Поскольку $\left(Fe_1,\, Fe_2,\, \dots\,,\, Fe_n\right) = (e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot F_e$, где F_e — матрица оператора F в базисе e, коэффициент пропорциональности равен определителю матрицы оператора:

$$\frac{\omega_F}{\omega} = \frac{\omega\left(Fe_1,\, Fe_2,\, \dots\,,\, Fe_n\right)}{\omega(e_1, e_2, \dots, e_n)} = \frac{\omega(e_1, e_2, \dots, e_n) \cdot \det F_e}{\omega(e_1, e_2, \dots, e_n)} = \det F_e$$

Таким образом, $\det F_e$ не зависит от e, и при применении F к любому набору векторов объём натянутого на них параллелепипеда умножается на $\det F_e$. Определитель $\det F_e$ называется *определителем линейного оператора* $F : V \to V$ и обозначается $\det F$.

Из предл. 9.2 вытекает, что определитель мультипликативен по отношению к композиции: $\det FG = \det F \det G$. Поэтому операторы определителя один образуют в полной линейной группе $\mathrm{GL}(V)$ подгруппу. Она обозначается $\mathrm{SL}(V)$ и называется *специальной линейной группой* пространства V. Геометрически, специальная линейная группа состоит из всех операторов, сохраняющих некоторую (а значит, и любую) ненулевую форму объёма.

Специальная линейная группа координатного пространства $\Bbbk^n$ состоит из матриц определителя 1 и обозначается $\mathrm{SL}_n(\Bbbk) \subset \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$.

9.4. Грассмановы многочлены. Полезным алгебраическим инструментом для работы с определителями являются *грассмановы многочлены.* Алгебра *грассмановых многочленов* $K\langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle$ от переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ с коэффициентами в коммутативном кольце K определяется точно также, как алгебра обычных многочленов, с той только разницей, что грассмановы переменные ξ_i, в отличие от обычных, не коммутируют, а *антикоммутируют* друг с другом, т. е. подчиняются соотношениям[1]

$$\forall\, i, j \quad \xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i \quad \text{и} \quad \forall\, i \quad \xi_i \wedge \xi_i = 0\,. \tag{9-11}$$

Символ « $\wedge$ » здесь и далее используется для обозначения грассманова (антикоммутативного) умножения, чтобы отличать его от обычного (коммутативного). Для каждой строго возрастающей слева направо последовательности номеров $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$, положим

$$\xi_I \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_m}\,, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_m\,. \tag{9-12}$$

Перестановка переменных $g \in S_m$ меняет знак этого монома по правилу

$$\xi_{i_{g(1)}} \wedge \xi_{i_{g(2)}} \wedge \dots \wedge \xi_{i_{g(m)}} = \operatorname{sgn}(g) \cdot \xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge \dots \wedge \xi_{i_m}\,. \tag{9-13}$$

[1]если $1 + 1$ не делит нуль в K, то соотношения $\xi_i \wedge \xi_i = 0$ могут быть опущены, поскольку они вытекают из соотношений $\xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i$, если положить в них $i = j$; если же $-1 = 1$, то условия антикоммутирования $\xi_i \wedge \xi_j = -\xi_j \wedge \xi_i$ и коммутирования $\xi_i \wedge \xi_j = \xi_j \wedge \xi_i$ совпадают друг с другом, и именно соотношение $\xi_i \wedge \xi_i = 0$ отличает грассмановы переменные от обычных

Поскольку квадраты грассмановых переменных равны нулю, мономы (9-13) исчерпывают всё множество грассмановых мономов. Иначе говоря, $\binom{n}{m}$ мономов (9-12) по-определению образуют базис в модуле Λ^m грассмановых многочленов степени m, а вся грассманова алгебра как модуль над K является конечной прямой суммой

$$K\langle\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\rangle = \Lambda^0\oplus\Lambda^1\oplus\Lambda^2\oplus\cdots\oplus\Lambda^n\,.$$

Умножение базисных мономов (9-12) задаётся правилом

$$\xi_I\wedge\xi_J = \begin{cases}\operatorname{sgn}(i_1,i_2,\dots,i_m,\,j_1,j_2,\dots,j_k)\cdot\xi_{I\sqcup J} & \text{если } I\cap J=\varnothing\\ 0 & \text{если } I\cap J\neq\varnothing\end{cases}\tag{9-14}$$

(перестановка $(i_1,i_2,\dots,i_m,\,j_1,j_2,\dots,j_k)\in S_{k+m}$ обратна к тасующей перестановке, расставляющей набор номеров $i_1,i_2,\dots,i_m,\,j_1,j_2,\dots,j_k$ в порядке их возрастания).

Отметим, что базис в Λ^0 состоит из единственного монома нулевой степени $\xi_\varnothing\overset{\text{def}}{=}1$, отвечающего пустому набору $I=\varnothing$ и являющегося единицей грассмановой алгебры, а базис в Λ^n состоит из единственного монома старшей степени

$$\xi_{\text{top}}=\xi_1\wedge\xi_2\wedge\cdots\wedge\xi_n\,,$$

который аннулируется умножением на любой грассманов многочлен с нулевым свободным членом.

Два грассмановых монома степеней m и k коммутируют друг с другом по правилу

$$\left(\xi_{i_1}\wedge\xi_{i_2}\wedge\cdots\wedge\xi_{i_m}\right)\wedge\left(\xi_{j_1}\wedge\xi_{j_2}\wedge\cdots\wedge\xi_{j_k}\right)= \\ =(-1)^{km}\left(\xi_{j_1}\wedge\xi_{j_2}\wedge\cdots\wedge\xi_{j_k}\right)\wedge\left(\xi_{i_1}\wedge\xi_{i_2}\wedge\cdots\wedge\xi_{i_m}\right)$$

(для перенесения каждой из k переменных ξ_j через m переменных ξ_i требуется m транспозиций). Поэтому для любых двух однородных грассмановых многочленов f и g выполняется *Кошулево правило знаков*

$$f\wedge g=(-1)^{\deg f\deg g}g\wedge f\,.\tag{9-15}$$

В частности, однородные многочлены чётной степени коммутируют со всеми грассмановыми многочленами.

Упражнение 9.6. Опишите *центр* грассмановой алгебры (т. е. грассмановы многочлены, перестановочные со всеми элементами грассмановой алгебры).

9.4.1. Линейная замена переменных и миноры. Рассмотрим набор однородных грассмановых линейных форм $(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_k)=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)\cdot C$, где $C\in\operatorname{Mat}_{n\times k}(K)$. Составленные из этих форм мономы m-той степени $\eta_J=\eta_{j_1}\wedge\eta_{j_2}\wedge\cdots\wedge\eta_{j_m}$ линейно выражаются через базисные мономы $\xi_I=\xi_{i_1}\wedge\xi_{i_2}\wedge\cdots\wedge\xi_{i_m}$ следующим образом:

$$\eta_J=\eta_{j_1}\wedge\eta_{j_2}\wedge\cdots\wedge\eta_{j_m}=\Big(\sum_{i_1}\xi_{i_1}c_{i_1j_1}\Big)\wedge\Big(\sum_{i_2}\xi_{i_2}c_{i_2j_2}\Big)\wedge\cdots\wedge\Big(\sum_{i_m}\xi_{i_m}c_{i_mj_m}\Big)= \\ =\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_m\leqslant n}\xi_{i_1}\wedge\xi_{i_2}\wedge\cdots\wedge\xi_{i_m}\cdot\sum_{g\in S_m}\operatorname{sgn}(g)\,c_{i_{g(1)}j_1}c_{i_{g(2)}j_2}\cdots c_{i_{g(m)}j_m}=\sum_I\xi_I\cdot c_{IJ}\,,$$

где $c_{IJ} = \det C_{IJ}$ обозначает определитель $m \times m$-подматрицы $C_{IJ} \subset C$, сосредоточенной в пересечениях столбцов с номерами из J и строк с номерами из I, где $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ пробегает все наборы из m возрастающих номеров $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqslant k$. Определитель $c_{IJ} \overset{\text{def}}{=} \det C_{IJ}$ этой подматрицы называется IJ-тым *минором* m-того порядка в матрице C.

Таким образом, IJ-тый элемент матрицы, выражающей грассманов моном η_J через грассмановы мономы ξ_I равен IJ-тому минору m-того порядка в матрицы выражающей переменные η через переменные ξ .

9.5. Соотношения Лапласа. Для каждого набора возрастающих индексов

$$J = (j_1, j_2, \dots, j_m) \subset \{1, 2, \dots, n\}$$

положим $\deg J \overset{\text{def}}{=} m$, $|J| \overset{\text{def}}{=} j_1 + j_2 + \cdots + j_m$ и условимся обозначать через

$$\bar{J} = \left(\bar{j}_1, \bar{j}_2, \dots, \bar{j}_{n-m}\right) = \{1, 2, \dots, n\} \smallsetminus J$$

дополнительный к J набор возрастающих индексов длины $\deg \bar{J} = n - m$.

Рассмотрим произвольную квадратную матрицу $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ и грассмановы линейные формы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ от переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, заданные равенствами

$$\alpha_j = \xi_1 \cdot a_{1j} + \xi_2 \cdot a_{2j} + \cdots + \xi_n \cdot a_{nj} . \tag{9-16}$$

Для любых двух наборов I, J одинаковой длины $\deg I = \deg J = m$ произведения

$$\alpha_J = \alpha_{j_1} \wedge \alpha_{j_2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{j_m} \quad \text{и} \quad \alpha_{\bar{I}} = \alpha_{\bar{i}_1} \wedge \alpha_{\bar{i}_2} \wedge \cdots \wedge \alpha_{\bar{i}_m}$$

имеют дополнительные степени m и $n - m$. Перемножая их по формуле (9-14), получим

$$\alpha_J \wedge \alpha_{\bar{I}} = \begin{cases} (-1)^{|J| + \frac{m(m+1)}{2}} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \tag{9-17}$$

(знак соответствующей тасующей перестановки был вычислен в упр. 9.3). Подставляя в равенство (9-17) разложения (9-16), в левой части будем иметь

$$\left(\sum_M \xi_M a_{MJ}\right) \wedge \left(\sum_L \xi_L a_{L\bar{I}}\right) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_n \sum_M (-1)^{|M|} a_{MJ} a_{\overline{MI}} ,$$

где M пробегает все индексы длины $\deg M = m$. В правой же части получим 0 при $I \neq J$ и

$$(-1)^{\frac{m(m+1)}{2} + |J|} \det A \cdot \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_n$$

при $I = J$. Таким образом, для каждых двух наборов J, I по m строк произвольной квадратной матрицы A выполняются *соотношения Лапласа*

$$\sum_M (-1)^{|M| + |J|} a_{MJ} a_{\overline{MI}} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \tag{9-18}$$

где суммирование идёт по всем наборам M из m строк матрицы A.

При $I = J$ соотношение (9-18) даёт формулу для вычисления определителя $\det A$ через всевозможные миноры a_{MJ} порядка m, сосредоточенные в m фиксированных столбцах матрицы A с номерами J, и *дополнительные* к ним миноры $a_{\overline{JM}}$ порядка $n-m$, равные определителям матриц, получающихся из A вычёркиванием всех строк и столбцов, содержащих минор a_{MJ}:

$$\det A = \sum_M (-1)^{|M|+|J|} a_{MJ} a_{\overline{MJ}} \tag{9-19}$$

Произведение $(-1)^{|M|+|J|} a_{\overline{MJ}}$ называется *алгебраическим дополнением* к минору a_{MJ} и обозначается $\overline{a}_{MJ}$. При $I \neq J$ соотношение (9-18) имеет с точностью до знака вид

$$\sum_M (-1)^{|M|+|I|} a_{MJ} a_{\overline{MI}} = 0 \tag{9-20}$$

и называется *теоремой об умножении на чужие алгебраические дополнения*, поскольку левая часть в (9-20) отличается от (9-19) тем, что миноры a_{MJ} умножаются не на свои алгебраические дополнения $a_{\overline{MJ}}$, а дополнения $a_{\overline{MI}}$ к минорам a_{MI}, сосредоточенным в другом наборе столбцов $I \neq J$.

Упражнение 9.7. Установите транспонированный вариант соотношений Лапласа

$$\sum_M (-1)^{|I|+|M|} a_{JM} a_{\overline{IM}} = \begin{cases} \det A & \text{при } I = J \\ 0 & \text{при } I \neq J \end{cases} \tag{9-21}$$

Если согласованно занумеровать все m-элементные подмножества и все $(n-m)$-элементные подмножества в множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ так, чтобы дополнительные подмножества J и $\overline{J}$ имели одинаковые номера, и обозначить через $\mathcal{A}_m$ и $\mathcal{A}_m^\vee$ квадратные матрицы размера $\binom{n}{m} \times \binom{n}{m}$, у которых в позиции IJ стоят, соответственно, IJ-тый минор a_{IJ} и алгебраическое дополнение $(-1)^{|J|+|I|} a_{\overline{JI}}$ к JI-тому[1] минору матрицы A, то все соотношения Лапласа (9-18) можно записать одним матричным равенством

$$\mathcal{A}_m^\vee \cdot \mathcal{A}_m = \det A \cdot \mathcal{E}\,, \tag{9-22}$$

где через $\mathcal{E}$ — единичная матрица размера $\binom{n}{m} \times \binom{n}{m}$, а их транспонированные версии (9-21) — равенством

$$\mathcal{A}_m \cdot \mathcal{A}_m^\vee = \det A \cdot \mathcal{E}\,. \tag{9-23}$$

Тем самым, матрицы $\mathcal{A}_m$ и $\mathcal{A}_m^\vee$ коммутируют и «почти обратны» друг другу.

Пример 9.3 (определитель пучка матриц)
Рассмотрим квадратные матрицы $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ и пару коммутирующих переменных x, y. Матрица $x \cdot A + y \cdot B$ имеет элементы в $K[x, y]$, и её определитель $\det(x \cdot A + y \cdot B) \in K[x, y]$ является однородным многочленом степени n от x и y. Покажем, что его коэффициент при $x^m y^{n-m}$ равен

$$\sum_{IJ} (-1)^{|I|+|J|} a_{IJ} b_{\overline{IJ}}\,, \tag{9-24}$$

где суммирование идёт по всем m-элементным подмножествам $I, J \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Для вывода формулы (9-24) рассмотрим два набора грассмановых линейных однородных форм

[1] обратите внимание, что буквы I и J переставились

$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)\cdot A$ и $(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n) = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)\cdot B$ от переменных $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ и равенство

$$(x\alpha_1+y\beta_1)\wedge(x\alpha_2+y\beta_2)\wedge\,\cdots\,\wedge(x\alpha_n+y\beta_n)=\det(xA+yB)\cdot\xi_1\wedge\xi_2\wedge\,\cdots\,\wedge\xi_n\,.$$

В левой части слагаемые, содержащие $x^m y^{n-m}$, возникают при выборе из каких-нибудь m перемножаемых скобок первого слагаемого, а из всех остальных скобок — второго. Если первое слагаемое выбирается в скобках с номерами $i_1,i_2,\dots,i_m$, то коэффициент при $x^m y^{n-m}$ получается равным

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(i_1,i_2,\dots,i_m,\,\bar i_1,\bar i_2,\dots,\bar i_{n-m})\cdot\alpha_{i_1}\wedge\alpha_{i_2}\wedge\,\cdots\,\wedge\alpha_{i_k}\wedge\beta_{\bar i_1}\wedge\beta_{\bar i_2}\wedge\,\cdots\,\wedge\beta_{\bar i_{n-m}}=\\ =(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+|I|}\alpha_I\wedge\beta_{\bar I}=(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+|I|}\Big(\sum_J\xi_J a_{JI}\Big)\wedge\Big(\sum_M\xi_M b_{M\bar I}\Big)=\\ =(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}+|I|}\sum_{JM}a_{JI}\cdot b_{M\bar I}\cdot\xi_J\wedge\xi_M=\Big(\sum_J(-1)^{|I|+|J|}a_{JI}\cdot b_{\overline{JI}}\Big)\cdot\xi_1\wedge\xi_2\wedge\,\cdots\,\wedge\xi_n\end{aligned}$$

Коэффициент при $a^m b^{n-m}$ в $\det(xA+yB)$ получается суммированием этих подобных слагаемых по всем наборам I из m возрастающих номеров, что и даёт формулу (9-24).

Пример 9.4 (главные миноры)
Полагая в формуле (9-24) $x=1$, $y=t$ и $B=E$, получаем разложение

$$\begin{aligned}\det(tE+A)=t^n+\sum_{m=1}^{n}t^{n-m}\cdot\sum_{\#I=m}a_{II}=\\ =t^n+t^{n-1}\cdot\sum_i a_{ii}+t^{n-1}\cdot\sum_{i<j}(a_{ii}a_{jj}-a_{ij}a_{ji})+\,\cdots\,+t\cdot\sum_i a_{\overline{ii}}+\det A\,,\end{aligned}$$

в котором коэффициент при t^{n-m} равен сумме определителей всех $m\times m$ подматриц матрицы A, главная диагональ[1] которых содержится в главной диагонали матрицы A. Они называются *главными минорами* m-того порядка. Коэффициент при t^{n-1}, равный сумме элементов, стоящих на главной диагонали матрицы A, называется *следом* матрицы A и обозначается

$$\operatorname{tr}(A)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\,. \tag{9-25}$$

Упражнение 9.8. Покажите, что $\operatorname{tr}(A+B)=\operatorname{tr}(A)+\operatorname{tr}(B)$ и $\operatorname{tr}(AB)=\sum_{ij}a_{ij}b_{ji}=\operatorname{tr}(BA)$.

Упражнение 9.9. Убедитесь, что в обозначениях из формулы (9-22) соотношение (9-24) означает равенство $\det(xA+yB)=\sum_m\operatorname{tr}\left(\mathcal{A}_m\cdot\mathcal{B}^{\vee}{}_m\right)\cdot x^m y^{n-m}$.

[1]напомню, что *главной* называется диагональ, идущая из левого верхнего угла в правый нижний и состоящая из элементов a_{ii}

9.6. Присоединённая матрица. При $m = 1$ в соотношениях Лапласа (9-22) наборы $I = (i)$ и $J = (j)$ содержат по одному индексу и миноры $a_{IJ} = a_{ij}$ превращаются в матричные элементы, а матрица $\mathcal{A}_1$ — в матрицу A. Матрица $\mathcal{A}_1^\vee$, транспонированная к матрице из алгебраических дополнений до элементов матрицы A, состоит из элементов

$$a_{ij}^\vee \overset{\text{def}}{=} (-1)^{i+j} a_{\overline{ji}} \,. \tag{9-26}$$

Она называется *присоединённой* к A матрицей и обозначается $A^\vee$. Минор $a_{\overline{ji}}$ равен определителю матрицы, которая получается из A вычёркиванием j-й строки и i-го столбца. Его часто обозначают A_{ji}. Матричные соотношения (9-22) и (9-23) при $m = 1$ имеют вид

$$A \cdot A^\vee = A^\vee \cdot A = \det(A) \cdot E = \begin{pmatrix} \det(A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det(A) \end{pmatrix}.$$

Если $\det A \in K$ обратим, мы получаем явную формулу для обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^\vee \,.$$

Например, для 2×2-матрицы определителя 1

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

а для 3×3-матрицы определителя 1

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) & -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{31}) & (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \\ -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) & (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) & -(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) \\ (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) & -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{32}) & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \end{pmatrix}$$

(в общем случае все элементы матриц в правых частях надо поделить на $\det A$).

Предложение 9.3 (критерий обратимости матрицы)
Над произвольным коммутативным кольцом K с единицей матрица $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ обратима тогда и только тогда, когда обратим её определитель $\det A \in K$, и в этом случае $A^{-1} = A^\vee / \det A$.

Доказательство. Если A обратима, то $AA^{-1} = E$, откуда $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$. Наоборот, если $\det A$ обратим, то по предыдущему $AA^\vee / \det A = E$. □

Предложение 9.4
Пусть модуль V над произвольным коммутативным кольцом K линейно порождается векторами $(w_1, w_2, \dots, w_m)$ и линейный оператор $F : V \to V$ действует на них по правилу $\left(Fw_1,\, Fw_2,\, \dots\,,\, Fw_n\right) = (w_1, w_2, \dots, w_m) \cdot C$, где $C \in \mathrm{Mat}_m(K)$. Тогда образ оператора умножения на $\det C : v \mapsto v \cdot \det C$ содержится в образе оператора F.

Доказательство. Оператор умножения на $\det C$ действует на порождающие по правилу

$$(w_1, w_2, \dots, w_m) \mapsto (w_1, w_2, \dots, w_m) \cdot \det C \cdot E = (w_1, w_2, \dots, w_m) \cdot C \cdot C^\vee \,,$$

где E — единичная матрица, а $C^\vee$ — матрица, присоединённая к C. Столбцы матрицы $C \cdot C^\vee$ являются линейными комбинациями столбцов матрицы C и, тем самым, лежат в образе F. □

Предложение 9.5 (правило Крамера 1)
Над произвольным коммутативным кольцом K с единицей набор векторов $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ координатного модуля K^n тогда и только тогда образует базис в K^n, когда определитель $\det(v_1, v_2, \dots, v_n) = \det C_{ev}$ матрицы их координат в стандартном базисе e обратим в K, и в этом случае коэффициенты разложения $w = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n$ произвольного вектора $w \in K^n$ по базису $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ вычисляются по *правилу Крамера*:

$$x_i = \frac{\det\left(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n\right)}{\det(v_1, v_2, \dots, v_n)}. \tag{9-27}$$

Доказательство. Если векторы $v_1, v_2, \dots, v_n$ образуют базис, то $e = vC_{ve}$ для некоторой матрицы $C_{ve} \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Тогда $C_{ev}C_{ve} = E$ и $\det C_{ev} \det C_{ve} = 1$, так что $\det C_{ev}$ обратим.

Наоборот, если $\det C_{ev}$ обратим, то векторы v линейно независимы, а матрица C_{ev} обратима по предл. 9.3. Умножая соотношение $v = e \cdot C_{ev}$ справа на C_{ev}^{-1}, получаем линейное выражение стандартного базиса через векторы v: $e = v \cdot C_{ev}^{-1}$. Поэтому набор v линейно порождает K^n и, значит, является базисом[1]. Если $w = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n$, то

$$\det\left(v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n\right) = \det\left(v_1, \dots, v_{i-1}, \sum_\nu x_\nu v_\nu, v_{i+1}, \dots, v_n\right) =$$
$$= \sum_\nu x_\nu \cdot \det\left(v_1, \dots, v_{i-1}, v_\nu, v_{i+1}, \dots, v_n\right) = x_i \cdot \det\left(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\right),$$

что влечёт за собой правило Крамера. □

Пример 9.5 (разложения определителя по строке и столбцу)
При $m = 1$ первое из соотношений Лапласа (9-19) имеет вид

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} a_{\overline{ij}} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} \tag{9-28}$$

и называется *разложением определителя по j-тому столбцу*, а его транспонированный вариант (9-21) имеет вид

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} a_{\overline{ij}} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} \tag{9-29}$$

называется *разложением определителя по i-той строке*. Например, разложение определителя 3×3 по первому столбцу таково:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{21}\left(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}\right) + a_{31}\left(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}\right)$$

[1]см. зам. 6.3. на стр. 89

Пример 9.6 (правило Крамера 2)
Рассмотрим систему из n линейных уравнений на $n+1$ неизвестных

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n0}x_1 + a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{9-30}$$

и построим по матрице $A = \left(a_{ij}\right)$ её коэффициентов вектор $\alpha = (A_0, A_1, \dots, A_n) \in K^{n+1}$, i-тая координата которого равна умноженному на $(-1)^i$ определителю $n \times n$-матрицы, которая получается из $n \times (n+1)$-матрицы A выкидыванием i-того столбца:

$$A_i = (-1)^i \det \begin{pmatrix} a_{1,0} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,0} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,0} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \tag{9-31}$$

Из формулы для разложения определителя по строке вытекает, что $x = \alpha$ является решением системы (9-30). В самом деле, дописывая к матрице A сверху ещё один экземпляр её i-той строки, мы получим квадратную матрицу размера $(n+1) \times (n+1)$ с нулевым определителем. Раскладывая последний по верхней строке, приходим к равенству

$$a_{i0}A_0 + a_{i1}A_1 + \cdots + a_{in}A_n = 0\,.$$

Упражнение 9.10. Проверьте, что если $K = \Bbbk$ — поле, то уравнения (9-30) линейно независимы тогда и только тогда, когда $\alpha \neq 0$, и в этом случае решения системы (9-30) образуют в $\Bbbk^{n+1}$ одномерное векторное подпространство, порождённое вектором α.

Например, в $\Bbbk^3$ пересечение двух не совпадающих плоскостей

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z = 0 \end{cases}$$

является прямой с направляющим вектором $\left(\, a_2b_3 - a_3b_2\,,\, -a_1b_3 + a_3b_1\,,\, a_1b_2 - a_2b_1 \,\right)$.

Упр. 9.1. Любая перестановка $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ символов $\{1, 2, \dots, n\}$ является композицией $g = \sigma \circ g'$ транспозиции σ — символов n и g_n и перестановки $g' = \sigma \circ g$, оставляющей на месте элемент n. По индукции g' раскладывается в композицию транспозиций, не затрагивающих элемента n.

Упр. 9.3. При условии, что все точки пересечения двойные и трансверсальные, две нити, идущие из i и из j пересекаются между собою нечётное число раз, если пара (i, j) инверсна, и чётное число раз, если пара не инверсна (в действительности, картинку всегда можно нарисовать так, чтобы количества точек пересечения в этих двух ситуациях равнялись 1 и 0 соответственно). Знак тасующей перестановки $(i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_m)$ равен $(-1)^{|I|+\frac{1}{2}k(k+1)}$, где *вес* $|I| \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{\nu} i_\nu$. Действительно, нити, выходящие из чисел $i_1, i_2, \dots, i_k$ верхней строчки не пересекаются между собою и пересекают, соответственно, $i_1 - 1$, $i_2 - 2$, … , $i_k - k$ начинающихся левее нитей, выходящих из j-точек и тоже между собою не пересекающихся.

Упр. 9.4. Если g является композицией транспозиций $\sigma_k \sigma_{k-1} \cdots \sigma_1$, то $g^{-1} = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k$ является произведением тех же транспозиций в противоположном порядке.

Упр. 9.5. Индукция по m. При $m = 1$ только нулевой многочлен $f \in \Bbbk[x]$ имеет бесконечно много корней. В общем случае запишем $f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_m]$ как многочлен от x_m с коэффициентами в $\Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_{m-1}]$ и вычислим коэффициенты в произвольной точке $\Bbbk^{m-1}$. Получится многочлен из $\Bbbk[x]$. Он равен нулю в каждой точке $\Bbbk$, только если все коэффициенты равны нулю. По индукции, все коэффициенты — нулевые многочлены, а значит и $f = 0$. Над полем $\mathbb{F}_q$ множество всех отображений $\mathbb{F}_q^m \to \mathbb{F}$ конечно (состоит из q^{q^m} элементов), а множество многочленов бесконечно.

Упр. 9.6. При чётном n центр алгебры $K\langle \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \rangle$ линейно порождается мономами чётных степеней, при нечётном n — мономами чётных степеней и старшим мономом $\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_n$ (имеющим в этом случае нечётную степень).

Упр. 9.7. Это сразу следует из равенства $\det A = \det A^t$.

Упр. 9.10. Если стоящие в левых частях уравнений (9-30) линейные формы

$$\alpha_i = \left(a_{i,0},\ a_{i,1},\ \cdots,\ a_{i,n}\right) \in \Bbbk^{n+1*}$$

линейно независимы, то по лемме о замене[1] ими можно заменить подходящие n ковекторов стандартного базиса в $\Bbbk^{n+1*}$. Пусть это будут последние n векторов. Так как ковекторы $(1,\ 0,\ \dots,\ 0)$ и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ образуют базис, определитель, составленный из строк их координат, отличен от нуля. Раскладывая его по строке $(1,\ 0,\ \dots,\ 0)$, видим, что он равен A_0, откуда $A_0 \neq 0$. Если же строки матрицы A линейно зависимы, то все $A_i = 0$.

[1] см. лем. 6.2 на стр. 89