

## §11. Пространство с оператором

**11.1. Классификация пространств с оператором.** Пусть  $\mathbb{k}$  — произвольное поле,  $V$  — конечномерное векторное пространство над  $\mathbb{k}$ , а  $F : V \rightarrow V$  —  $\mathbb{k}$ -линейный эндоморфизм пространства  $V$ . Мы будем называть пару  $(F, V)$  *пространством с оператором* или просто *оператором* над  $\mathbb{k}$ . Линейное отображение  $C : U_1 \rightarrow U_2$  между пространствами с операторами  $(F_1, U_1)$  и  $(F_2, U_2)$  называется *гомоморфизмом*, если  $F_2 \circ C = C \circ F_1$ . В этом случае говорят, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{C} & U_2 \\ F_1 \uparrow & & \uparrow F_2 \\ U_1 & \xrightarrow{C} & U_2 \end{array}$$

коммутативна<sup>1</sup>. Если  $C$  — изоморфизм векторных пространств, операторы  $F_1 : U_1 \rightarrow U_1$  и  $F_2 : U_2 \rightarrow U_2$  называются *изоморфными* или *подобными*. В этой ситуации  $F_2 = CF_1C^{-1}$ , и говорят, что  $G$  получается из  $F$  *сопряжением* посредством  $C$ .

Подпространство  $U \subset V$  называется *F-инвариантным*, если  $F(U) \subset U$ . В этом случае  $(F|_U, U)$  тоже является пространством с оператором и вложение  $U \hookrightarrow V$  является гомоморфизмом пространств с операторами. Оператор, не имеющий инвариантных подпространств, отличных от нуля и всего пространства, называется *неприводимым* или *простым*.

**Упражнение 11.1.** Покажите что оператор умножения на  $t$  в фактор кольце  $\mathbb{R}[t]/(t^2 + 1)$  неприводим над  $\mathbb{R}$ .

Оператор  $F : V \rightarrow V$  называется *разложимым*, если пространство  $V$  можно разложить в прямую сумму двух ненулевых  $F$ -инвариантных подпространств, и *неразложимым* — в противном случае. Все простые операторы неразложимы.

**Упражнение 11.2.** Покажите, что оператор умножения на  $t$  в фактор кольце  $\mathbb{k}[t]/(t^n)$  неразложим (поле  $\mathbb{k}$  произвольно) и приводим при  $n > 1$ .

Таким образом, над любым полем  $\mathbb{k}$  имеются неразложимые пространства с оператором любой размерности. Очевидно, что всякое пространство с оператором является прямой суммой неразложимых.

**Упражнение 11.3.** Покажите, что двойственные операторы  $F : V \rightarrow V$  и  $F^* : V^* \rightarrow V^*$  либо оба разложимы, либо оба неразложимы.

**11.1.1. Пространство с оператором как  $\mathbb{k}[t]$ -модуль.** Задание линейного оператора  $F : V \rightarrow V$  эквивалентно заданию на пространстве  $V$  структуры модуля над кольцом многочленов  $\mathbb{k}[t]$ . В самом деле, структура  $\mathbb{k}[t]$ -модуля включает в себя операцию умножения векторов на  $t : v \mapsto tv$ , которая является линейным отображением  $V \rightarrow V$ . Если обозначить его буквой  $F$ , то оператор умножения векторов на фиксированный многочлен  $f(t) : v \mapsto f(t) \cdot v$  имеет вид  $f(F) : V \rightarrow V$ , т. е. представляет собой результат вычисления многочлена  $f$  на элементе  $F$  в  $\mathbb{k}$ -алгебре  $\text{End}(V)$ . Наоборот, каждый линейный оператор  $F : V \rightarrow V$  задаёт на  $V$  структуру  $\mathbb{k}[t]$ -модуля по формуле  $f(t) \cdot v \stackrel{\text{def}}{=} f(F)v$ . Мы будем обозначать этот модуль через  $V_F$ .

<sup>1</sup>произвольная диаграмма отображений называется *коммутативной*, если композиции отображений вдоль любых двух путей с общим началом и концом одинаковы

Гомоморфизм  $\mathbb{k}[t]$ -модулей  $C : V_F \rightarrow W_G$ , построенных по операторам  $F : V \rightarrow V$  и  $G : W \rightarrow W$  — это линейное отображение  $C : V \rightarrow W$ , перестановочное с умножением векторов на  $t$ , т. е. такое что  $C \circ F = F \circ C$ . Поэтому операторы  $F$  и  $G$  изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны  $\mathbb{k}[t]$ -модули  $V_F$  и  $W_G$ .

Векторное подпространство  $U \subset V$  является  $\mathbb{k}[t]$ -подмодулем в модуле  $V_F$ , если и только если оператор умножения на  $t$  переводит  $U$  в себя, т. е. тогда и только тогда, когда это подпространство  $F$ -инвариантно. Аналогично, разложимость  $V$  в прямую сумму инвариантных подпространств означает разложимость  $\mathbb{k}[t]$ -модуля  $V_F$  в прямую сумму  $\mathbb{k}[t]$ -подмодулей.

Если векторное пространство  $V$  конечномерно над  $\mathbb{k}$ , то  $\mathbb{k}[t]$ -модуль  $V_F$  является конечно порождённым модулем кручения. В самом деле, любой базис  $V$  над  $\mathbb{k}$  порождает  $V_F$  как модуль над  $\mathbb{k}[t]$ , и в каноническом разложении  $V_F$  в прямую сумму свободного модуля и модуля кручения<sup>1</sup> свободное слагаемое отсутствует, т. к. иначе  $V$  было бы бесконечномерно над  $\mathbb{k}$ . Из теоремы об элементарных делителях<sup>2</sup> вытекает

**Теорема 11.1**

Любой линейный оператор в конечномерном векторном пространстве над произвольным полем  $\mathbb{k}$  подобен оператору умножения на  $t$  в прямой сумме фактор колец

$$\frac{\mathbb{k}[t]}{(p_i^{m_i}(t))} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{k}[t]}{(p_k^{m_k}(t))}, \quad (11-1)$$

где все многочлены  $p_\nu(t) \in \mathbb{k}[t]$  приведены и неприводимы. Каждое прямое слагаемое в этой сумме неразложимо. Операторы умножения на  $t$ , действующие в суммах

$$\frac{\mathbb{k}[t]}{(p_i^{m_i}(t))} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{k}[t]}{(p_k^{m_k}(t))} \quad \text{и} \quad \frac{\mathbb{k}[t]}{(q_i^{n_i}(t))} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{k}[t]}{(q_\ell^{n_\ell}(t))}$$

изоморфны тогда и только тогда, когда  $k = \ell$ , и прямые слагаемые можно переставить так, чтобы  $p_\nu = q_\nu$  и  $m_\nu = n_\nu$  при всех  $\nu$ .  $\square$

**Определение 11.1** (элементарные делители линейного оператора)

Дизъюнктивное объединение<sup>3</sup> всех многочленов  $p_\nu^{m_\nu}$ , стоящих в правой части разложения (11-1), называется *набором элементарных делителей* оператора  $F : V \rightarrow V$  и обозначается через  $\mathcal{E}\ell(F)$ .

**Следствие 11.1**

Линейные операторы  $F$  и  $G$  подобны тогда и только тогда, когда  $\mathcal{E}\ell(F) = \mathcal{E}\ell(G)$ .  $\square$

**Следствие 11.2**

Линейный оператор неразложим тогда и только тогда, когда он подобен оператору умножения на  $t$  в фактор кольце  $\mathbb{k}[t]/(p^m)$ , где  $p \in \mathbb{k}[t]$  неприводим и приведён. Неразложимый оператор неприводим, если и только если  $m = 1$ .  $\square$

<sup>1</sup>см. сл. 10.1 на стр. 158

<sup>2</sup>см. теор. 10.4 на стр. 158

<sup>3</sup>напомню, что каждый элементарный делитель  $p^m$  входит в него ровно столько раз, сколько прямых слагаемых вида  $\mathbb{k}[t]/(p^m)$  входит в разложение  $V$

Следствие 11.3

Многочлен  $f \in \mathbb{k}[t]$  тогда и только тогда аннулирует оператор  $F : V \rightarrow V$ , когда он делится на все элементарные делители оператора  $F$ .  $\square$

**11.1.2. Нильпотентные операторы.** Линейный оператор  $F : V \rightarrow V$  называется *нильпотентным*, если  $F^m = 0$  для некоторого  $m \in \mathbb{N}$ . Поскольку нильпотентный оператор аннулируется многочленом  $t^m$ , все его элементарные делители являются степенями  $t$ . Поэтому, согласно теор. 11.1, нильпотентный оператор изоморфен оператору умножения на  $t$  в прямой сумме фактор колец вида

$$\frac{\mathbb{k}[t]}{(t^{v_1})} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{k}[t]}{(t^{v_k})} \tag{11-2}$$

и два таких оператора изоморфны друг другу тогда и только тогда, когда выстроенные в порядке (нестрогого) убывания наборы показателей  $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_k$  у них одинаковы. Таким образом, нильпотентные операторы над произвольным полем  $\mathbb{k}$  взаимно однозначно соответствуют диаграммам Юнга  $\nu$ . Диаграмма  $\nu(F)$ , характеризующая нильпотентный оператор  $F$ , называется его *цикловым типом*.

Действие умножения на  $t$  на базис пространства  $\mathbb{k}[t] / (t^m)$ , состоящий из классов  $e_1 = [t^{m-1}]$ ,  $e_2 = [t^{m-2}]$ ,  $\dots$ ,  $e_m = [1]$  по модулю  $t^m$ , происходит по правилу

$$0 \leftarrow e_1 \leftarrow e_2 \leftarrow e_3 \leftarrow \dots \leftarrow e_{m-1} \leftarrow e_m$$

и задаётся матрицей, именуемой *нильпотентной жордановой клеткой* размера  $m$  :

$$J_m(0) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Тем самым, для нильпотентного оператора  $F$  циклового типа  $\nu(F)$  в пространстве  $V$  имеется базис, векторы которого размещаются по клеткам диаграммы  $\nu(F)$  так, что  $F$  переводит каждый из них в левый соседний, а векторы самого левого столбца — в нуль:

$\leftrightarrow$

$$\begin{array}{cccccccc}
 0 & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet \\
 0 & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet \\
 0 & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet \\
 0 & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet \\
 0 & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet & \leftarrow & \bullet
 \end{array}$$

(11-3)

Базис такого вида называется *циклическим* (или *жордановым*) базисом, а наборы базисных векторов, стоящие по строкам диаграммы, называются *жордановыми цепочками*. Так как сумма длин первых  $m$  столбцов диаграммы  $\nu(F)$  равна  $\dim \ker F^m$ , длина  $m$ -того столбца диаграммы  $\nu(F)$  равна

$$\nu_m^t(F) = \dim \ker F^m - \dim \ker F^{m-1} . \tag{11-4}$$

**11.1.3. Полупростые операторы.** Прямая сумма простых или, в другой терминологии, неприводимых пространств с операторами называется *полупростым* или *вполне приводимым* пространством с оператором. Полупростота в каком-то смысле «противоположна» нильпотентности и допускает несколько переформулировок.

Предложение 11.1

Следующие свойства оператора  $F : V \rightarrow V$  эквивалентны друг другу:

- 1) пространство  $V$  является прямой суммой неприводимых  $F$ -инвариантных подпространств
- 2) пространство  $V$  линейно порождается неприводимыми  $F$ -инвариантными подпространствами
- 3) для любого ненулевого  $F$ -инвариантного подпространства  $U \subsetneq V$  найдётся такое  $F$ -инвариантное подпространство  $W \subset V$ , что  $V = U \oplus W$
- 4) оператор  $F$  подобен умножению на  $t$  в прямой сумме фактор колец

$$\mathbb{k}[t]/(p_1) \oplus \mathbb{k}[t]/(p_2) \oplus \cdots \oplus \mathbb{k}[t]/(p_r),$$

где  $p_i \in \mathbb{k}[t]$  приведены и неприводимы<sup>1</sup> (но не обязательно различны).

Доказательство. Импликация (1)  $\Rightarrow$  (2) очевидна. Проверка импликации (2)  $\Rightarrow$  (3) использует индукцию по  $\dim V$  (при  $\dim V = 1$  доказывать нечего) и то, что для каждого  $F$ -инвариантного подпространства  $L \subset V$ , пересечение  $L \cap U$ , будучи  $F$ -инвариантным подпространством в  $L$ , либо нулевое, либо совпадает с  $L$ . Если все инвариантные подпространства  $L \subset V$  лежат в  $U$ , то  $U = V$  в силу (2), и доказывать нечего. Если есть ненулевое  $F$ -инвариантное подпространство  $L \subset V$  с  $L \cap U = 0$ , рассмотрим фактор  $V' = V/L$  и проекцию  $\pi : V \rightarrow V'$  с ядром  $L$ . Она инъективно отображает подпространство  $U \subset V$  на ненулевое  $F$ -инвариантное подпространство  $\pi(U) \subset V'$ . Поскольку  $\dim V' < \dim V$ , при  $\pi(U) \subsetneq V'$  по индукции найдётся такое  $F$ -инвариантное подпространство  $W' \subset V'$ , что  $V' = W' \oplus \pi(U)$ . При  $\pi(U) = V'$  положим  $W' = 0$ . Возьмём в качестве  $W \subset V$  полный прообраз  $W = \pi^{-1}(W')$ . Проверим, что  $V = U + W$ : проекция любого  $v \in V$  на  $V'$  представляется в виде  $\pi(v) = \pi(u) + w'$  с  $u \in U$ ,  $w' \in W'$ , и разность  $w = v - u \in W$ , поскольку  $\pi(w) = \pi(v) - \pi(u) = w' \in W'$ ; тем самым,  $v = w + u$  с  $w \in W$ ,  $u \in U$ . Если вектор  $v \in U \cap W$ , то  $\pi(v) \in \pi(U) \cap W' = 0$ , откуда  $v \in \ker \pi = L$ . Так как  $L \cap U = 0$ , мы заключаем, что  $U \cap W = 0$  и  $V = W \oplus U$ .

Чтобы доказать импликацию (3)  $\Rightarrow$  (4), покажем сначала, что если свойство (3) выполнено для пространства  $V$ , то оно выполнено и для каждого  $F$ -инвариантного подпространства  $H \subset V$ . Рассмотрим любое инвариантное подпространство  $U \subset H$  и отыщем в  $V$  такие инвариантные подпространства  $Q$  и  $R$ , что  $V = H \oplus Q = U \oplus Q \oplus R$ . Рассмотрим проекцию  $\pi : V \rightarrow H$  с ядром  $Q$  и положим  $W = \pi(R)$ .

Упражнение 11.4. Проверьте, что  $H = U \oplus W$ .

Таким образом, если свойство (3) выполнено для прямой суммы фактор колец (11-1) из теор. 11.1, то оно выполнено и для каждого слагаемого этой суммы. Однако по сл. 11.2 при  $m > 1$  пространство  $\mathbb{k}[t]/(p^m)$  приводимо, но неразложимо.

Импликация (4)  $\Rightarrow$  (1) также немедленно вытекает из сл. 11.2. □

Следствие 11.4 (из доказательства предл. 11.1)

Ограничение полупростого оператора на инвариантное подпространство также является полупростым оператором.

<sup>1</sup>иными словами, в прямой сумме (11-1) из теор. 11.1 все показатели степеней  $m_i = 1$

**11.1.4. Характеристический многочлен.** Пусть оператор  $F : V \rightarrow V$  имеет матрицу  $F_v$  в каком либо базисе  $v$  пространства  $V$ . Характеристический многочлен  $\det(tE - F_v)$  этой матрицы не меняется при переходе к любому другому базису  $w = vC$ , поскольку по форм. (8-13) на стр. 126  $F_w = C^{-1}F_vC$  и

$$\begin{aligned} \det(tE - F_w) &= \det(tC^{-1}EC - C^{-1}F_vC) = \det(C^{-1}(tE - F_v)C) = \\ &= \det C^{-1} \cdot \det(tE - F_v) \cdot \det C = \det(tE - F_v). \end{aligned}$$

Многочлен  $\chi_F(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det(tE - F_v)$  называется *характеристическим многочленом* оператора  $F$ . Предыдущее вычисление показывает, что подобные операторы имеют равные характеристические многочлены.

Упражнение 11.5. Пусть пространство с оператором  $(F, W)$  является прямой суммой пространств с операторами  $(G, U)$  и  $(H, V)$ . Убедитесь, что  $\chi_F(t) = \chi_G(t) \cdot \chi_H(t)$  в  $\mathbb{k}[t]$ .

Упражнение 11.6. Пусть  $f \in \mathbb{k}[t]$  — любой приведённый многочлен. Убедитесь, что характеристический многочлен оператора умножения на  $t$  в фактор кольце  $\mathbb{k}[t]/(f)$  равен  $f$ .

Из этих упражнений и теор. 11.1 мы получаем

Предложение 11.2

Характеристический многочлен равен произведению всех элементарных делителей.  $\square$

Упражнение 11.7. Выведите из предл. 11.2 новое доказательство теоремы Гамильтона – Кэли.

**11.1.5. Минимальный многочлен.** Для каждого неприводимого приведённого многочлена  $p \in \mathbb{k}[t]$  обозначим через  $m_p(F)$  максимальный показатель  $m$ , с которым  $p^m$  присутствует в наборе элементарных делителей оператора  $F$ , а для тех  $p$ , степени которых не представлены в  $\mathcal{E}l F$ , положим  $m_p(F) = 0$ . Таким образом,  $m_p(F) = 0$  для всех  $p$  кроме конечного числа. Из теор. 11.1 вытекает, что приведённый многочлен  $\mu_F(t)$  наименьшей возможной степени, аннулирующий оператор  $F$ , равен

$$\mu_F(t) = \prod_p p^{m_p(F)},$$

где произведение берётся по всем приведённым неприводимым  $p \in \mathbb{k}[t]$ . Многочлен  $\mu_F(t)$  называется *минимальным многочленом* оператора  $F$ . Отметим, что минимальный многочлен делит характеристический.

**11.1.6. Циклические векторы.** Вектор  $v \in V$  называется *циклическим вектором* линейного оператора  $F : V \rightarrow V$ , если его  $F$ -орбита  $v, Fv, F^2v, F^3v, \dots$  линейно порождает пространство  $V$  над полем  $\mathbb{k}$ . Иначе можно сказать, что  $v$  порождает модуль  $V_F$  над  $\mathbb{k}[t]$ .

Предложение 11.3

Следующие свойства оператора  $F : V \rightarrow V$  эквивалентны друг другу:

- 1)  $F$  обладает циклическим вектором
- 2)  $F$  подобен умножению на  $t$  в фактор кольце  $\mathbb{k}[t]/(f)$ , где  $f \in \mathbb{k}[t]$  — какой-либо приведённый многочлен

- 3) каждый неприводимый  $p \in \mathbb{k}[t]$  встречается в  $\mathcal{E}l F$  не более одного раза  
 4) минимальный многочлен оператора  $F$  совпадает с характеристическим.

Доказательство. Условия (3) и (4) эквивалентны в силу предл. 11.2 и означают, что оператор  $F$  подобен умножению на  $t$  в прямой сумме фактор колец

$$\mathbb{k}[t]/(p_1^{m_1}) \oplus \mathbb{k}[t]/(p_2^{m_2}) \oplus \dots \oplus \mathbb{k}[t]/(p_r^{m_r}),$$

в которой все неприводимые приведённые многочлены  $p_1, p_2, \dots, p_r$  попарно различны. По китайской теореме об остатках, эта сумма изоморфна  $\mathbb{k}[t]/(f)$ , где

$$f = \chi_F = \mu_F = \prod_{i=1}^r p_i^{m_i}.$$

Тем самым, (2) равносильно (3) и (4). Импликация (2)  $\Rightarrow$  (1) очевидна: в качестве циклического вектора для оператора умножения на  $t$  в фактор кольце  $\mathbb{k}[t]/(f)$  можно взять  $v = [1]$ . Наоборот, если модуль  $V_F$  порождается над  $\mathbb{k}[t]$  одним вектором  $v$ , то  $V_F = \mathbb{k}[t]/R$ , где  $R = \ker \pi$  — ядро  $\mathbb{k}[t]$ -линейного эпиморфизма  $\mathbb{k}[t] \rightarrow V_F$ , преводящего 1 в  $v$ . Поскольку  $\mathbb{k}[t]$  — кольцо главных идеалов, модмодуль  $R \subset \mathbb{k}[t]$  имеет вид  $(f)$ , где  $f$ -приведённый многочлен наименьшей степени со свойством  $f(F)v = 0$ . Тем самым,  $V = \mathbb{k}[t]/(f)$ .  $\square$

**11.2. Собственные подпространства.** Инвариантное для оператора  $F : V \rightarrow V$  подпространство, на котором  $F$  действует как скалярное умножение на число  $\lambda \in \mathbb{k}$ , обозначается

$$V_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\} = \ker(\lambda \text{Id}_V - F)$$

и называется *собственным подпространством* оператора  $F$ . Ненулевые векторы  $v \in V_\lambda$  называются *собственными векторами* оператора  $F$  с собственным числом  $\lambda$ .

Предложение 11.4

Любой набор собственных векторов с попарно различными собственными числами линейно независим.

Доказательство. Пусть собственные векторы  $v_1, v_2, \dots, v_m$  имеют попарно разные собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  и линейно зависимы. Рассмотрим зависимость, содержащую минимально возможное число векторов, и пусть это будут векторы  $e_1, e_2, \dots, e_k$ . Тогда  $k \geq 2$  и  $e_k = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_{k-1} e_{k-1}$ , где все  $x_i \in \mathbb{k}$  отличны от нуля. При этом  $\lambda_k e_k = F(e_k) = \sum x_i F(e_i) = \sum x_i \lambda_i e_i$ . Вычитая из этого равенства предыдущее, умноженное на  $\lambda_k$  получаем более короткую линейную зависимость

$$0 = x_1(\lambda_1 - \lambda_k) \cdot e_1 + x_2(\lambda_2 - \lambda_k) \cdot e_2 + \dots + x_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) \cdot e_{k-1}$$

с ненулевыми коэффициентами.  $\square$

Следствие 11.5

Сумма ненулевых собственных подпространств с разными собственными числами является прямой.  $\square$

**11.2.1. Спектр.** Все  $\lambda \in \mathbb{k}$ , для которых  $V_\lambda \neq 0$ , называются *собственными числами* (или *собственными значениями*) оператора  $F$ . Совокупность собственных чисел оператора  $F : V \rightarrow V$  обозначается  $\text{Spec } F$  и называется *спектром* оператора  $F$  в поле  $\mathbb{k}$ . По [сл. 11.5](#)

$$\sum_{\lambda \in \text{Spec } F} \dim V_\lambda \leq \dim V. \quad (11-5)$$

В частности, любой оператор  $F : V \rightarrow V$  имеет не более  $\dim V$  собственных чисел.

Упражнение 11.8. Покажите, что  $\text{Spec } F$  содержится в множестве корней любого многочлена, аннулирующего  $F$ .

Поскольку условие  $\ker(\lambda \text{Id}_V - F) \neq 0$  равносильно условию  $\det(\lambda \text{Id}_V - F) = 0$ , спектр оператора  $F$  совпадает с множеством всех различных корней его характеристического многочлена  $\chi_F(t) = \det(tE - F)$ . В частности, справедливо

Предложение 11.5

Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  любой оператор обладает хотя бы одним ненулевым собственным подпространством.  $\square$

Упражнение 11.9. Покажите, что над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  оператор  $F$  нильпотентен тогда и только тогда, когда  $\text{Spec } F = \{0\}$ , и приведите пример оператора, для которого неравенство (11-5) строгое.

Если известен спектр  $F$ , отыскание собственных подпространств сводится к решению систем линейных однородных уравнений  $(\lambda \text{Id}_V - F)v = 0$ , которые гарантированно имеют ненулевые решения при  $\lambda \in \text{Spec } F$ .

**11.2.2. Диагонализуемые операторы.** Оператор  $F : V \rightarrow V$  называется *диагонализуемым*, если в  $V$  имеется базис, в котором  $F$  записывается диагональной матрицей. Такой базис состоит из собственных векторов оператора  $F$ , а элементы диагональной матрицы суть собственные числа  $F$ , и каждое  $\lambda \in \text{Spec } F$  встречается на диагонали ровно столько раз, какова кратность корня  $t = \lambda$  в характеристическом многочлене  $\chi_F(t)$  и какова размерность собственного подпространства  $V_\lambda$ .

Иначе можно сказать, что диагонализуемый оператор  $F$  подобен оператору умножения на  $t$  в прямой сумме фактор колец  $\mathbb{k}[t]/(t - \lambda) \simeq \mathbb{k}$ , где  $\lambda$  пробегает  $\text{Spec } F$ , и каждое прямое слагаемое представлено  $\dim V_\lambda$  раз.

Предложение 11.6

Следующие свойства оператора  $F : V \rightarrow V$  эквивалентны:

- 1)  $F$  диагонализуем
- 2) пространство  $V$  линейно порождается собственными векторами оператора  $F$
- 3) характеристический многочлен  $\chi_F(t) = \det(tE - F)$  полностью раскладывается в  $\mathbb{k}[t]$  на линейные множители, и кратность каждого его корня  $\lambda$  равна размерности собственного подпространства  $V_\lambda$
- 4) все элементарные делители  $F$  имеют вид  $(t - \lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbb{k}$
- 5) оператор  $F$  аннулируется многочленом  $f$ , раскладывающимся в  $\mathbb{k}[t]$  в произведение попарно различных линейных множителей.

Доказательство. Эквивалентности (2)  $\Leftrightarrow$  (1)  $\Leftrightarrow$  (4) и импликация (1)  $\Rightarrow$  (3) очевидны. Эквивалентность (4)  $\Leftrightarrow$  (5) следует из сл. 11.3. Из (3) вытекает, что  $\sum \dim V_\lambda = \deg \chi_F = \dim V$ . Поэтому прямая по сл. 11.5 сумма всех различных собственных подпространств  $V_\lambda$  совпадает с  $V$ , что даёт импликацию (3)  $\Rightarrow$  (1).  $\square$

Следствие 11.6

Если оператор  $F : V \rightarrow V$  диагоналізуем, то его ограничение на любое инвариантное подпространство тоже диагоналізуемо на этом подпространстве.

Доказательство. Это вытекает из свойства (5) предл. 11.6.  $\square$

Упражнение 11.10. Убедитесь, что над алгебраически замкнутым полем диагоналізуемость равносильна полупростоте.

**11.3. Аннулирующие многочлены.** Если задан многочлен  $f \in \mathbb{k}[x]$ , аннулирующий линейный оператор<sup>1</sup>  $F : V \rightarrow V$ , и известно, как  $f$  раскладывается в  $\mathbb{k}[t]$  на простые множители, то в силу сл. 11.3 это оставляет лишь конечное число возможностей для набора элементарных делителей  $\mathcal{E}\ell(F)$  и часто позволяет явно описать разложение  $V$  в прямую сумму  $F$ -инвариантных подпространств во внутренних терминах действия  $F$  на пространстве  $V$ .

Пример 11.1 (инволюции)

Линейный оператор  $\sigma : V \rightarrow V$  называется *инволюцией*, если он аннулируется многочленом  $t^2 - 1$ , т. е. удовлетворяет соотношению  $\sigma^2 = \text{Id}_V$ . Тожественная инволюция  $\sigma = \text{Id}_V$  называется *тривиальной*. Так как  $t^2 - 1 = (t + 1)(t - 1) = 0$  является произведением различных линейных множителей, все инволюции диагоналізуемы. Пространство  $V$  с инволюцией  $\sigma$  распадается в прямую сумму собственных подпространств  $V = V_+ \oplus V_-$  с собственными значениями  $\pm 1$ , и любой вектор  $v \in V$  однозначно представим в виде  $v = v_+ + v_-$ , где  $v_+ = (v + Fv)/2 \in V_+ = \ker(\sigma - \text{Id}_V) = \text{im}(\sigma + \text{Id}_V)$  и  $v_- = (v - Fv)/2 \in V_- = \ker(\sigma + \text{Id}_V) = \text{im}(\sigma - \text{Id}_V)$ .

Предложение 11.7

Пусть оператор  $F : V \rightarrow V$  аннулируется многочленом  $q \in \mathbb{k}[t]$ , раскладывающимся над полем  $\mathbb{k}$  в произведение  $q = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_r$  попарно взаимно простых многочленов  $q_i \in \mathbb{k}[t]$ . Положим  $Q_j = q/q_j = \prod_{v \neq j} q_v$ . Тогда  $\ker q_j(F) = \text{im } Q_j(F)$  для каждого  $j$ , все эти подпространства  $F$ -инвариантны, и пространство  $V$  является прямой суммой тех из них, что отличны от нуля.

Доказательство. Поскольку  $q(F) = q_j(F) \circ Q_j(F) = 0$ , имеется включение

$$\text{im } Q_j(F) \subset \ker q_j(F).$$

Из взаимной простоты  $q_i(t)$  и  $Q_i(t)$  вытекает, что сумма ядер  $\ker q_i(F)$  прямая:

$$\ker q_i(F) \cap \sum_{j \neq i} \ker q_j(F) = 0.$$

<sup>1</sup>в силу тождества Гамильтона – Кэли по крайней мере один такой многочлен, а именно  $\chi_F(t) = \det(tE - F)$ , всегда можно предъявить явно



Действительно, подберём такие многочлены  $g(t)$  и  $h(t)$ , что  $1 = g(t)q_i(t) + h(t)Q_i(t)$ , подставим в это равенство  $t = F$  и применим оператор  $E = g(F) \circ q_i(F) + h(F) \circ Q_j(F)$  к любому вектору  $v \in \ker q_i(F) \cap \sum_{j \neq i} \ker q_j$ . Так как  $\ker Q_j(F)$  содержит все  $\ker q_j(F)$  с  $j \neq i$ , получим

$$v = Ev = g(F) \circ q_i(F)v + h(F) \circ Q_j(F)v = 0.$$

Наконец, из взаимной простоты многочленов  $Q_1, Q_2, \dots, Q_r$  вытекает, что  $V$  линейно порождается образами  $\operatorname{im} Q_j(F)$ : подберём такие многочлены  $h_1, h_2, \dots, h_r \in \mathbb{k}[t]$ , что  $\sum Q_j(t) \cdot h_j(t) = 1$ , подставим в это равенство  $t = F$  и применим обе части к любому вектору  $v \in V$ . Получим  $v = Ev = \sum Q_j(F)h_j(F)v \in \sum \operatorname{im} Q_j(F)$ .  $\square$

### Пример 11.2 (проекторы)

Линейный оператор  $\pi : V \rightarrow V$  называется *идемпотентом* или *проектором*, если он аннулируется многочленом  $t^2 - t = t(t - 1)$ , т.е. удовлетворяет соотношению  $\pi^2 = \pi$ . По [предл. 11.7](#) образ любого идемпотента  $\pi : V \rightarrow V$  совпадает с подпространством его неподвижных векторов:

$$\operatorname{im} \pi = \ker(\pi - \operatorname{Id}_V) = \{v \mid \pi(v) = v\},$$

и  $V = \ker \pi \oplus \operatorname{im} \pi$ , так что  $\pi$  проектирует  $V$  на  $\operatorname{im} \pi$  вдоль  $\ker \pi$ . Отметим, что оператор  $\operatorname{Id}_V - \pi$  тоже является идемпотентом и проектирует  $V$  на  $\ker \pi$  вдоль  $\operatorname{im} \pi$ . Таким образом, задание прямого разложения  $V = U \oplus W$  равносильно заданию пары идемпотентных эндоморфизмов пространства  $V$ : проектора  $\pi_U : V \rightarrow U$  вдоль  $W$  и проектора  $\pi_W : V \rightarrow W$  вдоль  $U$ , связанных соотношениями  $\pi_U + \pi_W = 1$  и  $\pi_U \pi_W = \pi_W \pi_U = 0$ .

### Предложение 11.8

Над полем вещественных чисел  $\mathbb{R}$  любой оператор обладает одномерным или двумерным инвариантным подпространством.

*Доказательство.* Пусть  $\chi_F = q_1 q_2 \dots q_m$ , где  $q_i \in \mathbb{R}[t]$  — неприводимые приведённые линейные или квадратичные многочлены, не обязательно различные. Применим нулевой оператор  $0 = q_1(F) \circ q_2(F) \circ \dots \circ q_m(F)$  к какому-нибудь ненулевому вектору  $v \in V$ . Тогда при некотором  $i \geq 0$  мы получим такой ненулевой вектор  $w = q_{i+1}(F) \circ \dots \circ q_m(F)v$ , что  $q_i(F)w = 0$ . Если  $q_i(t) = t - \lambda$  линейен, то  $F(w) = \lambda w$ , и мы имеем 1-мерное  $F$ -инвариантное подпространство  $\mathbb{k} \cdot w$ . Если  $q_i(t) = t^2 - at - \beta$  квадратичен, то  $F(Fw) = aF(w) + \beta w$  лежит в линейной оболочке векторов  $w$  и  $Fw$ , которая тем самым является  $F$ -инвариантным подпространством, и её размерность не превышает 2.  $\square$

**11.4. Разложение Жордана.** Всюду в этом разделе мы считаем, что основное поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто. В этом случае неприводимые многочлены в  $\mathbb{k}[t]$  исчерпываются линейными двучленами  $(t - \lambda)$ , и по [теор. 11.1](#) каждый оператор  $F : V \rightarrow V$  подобен оператору умножения на  $t$  в прямой сумме фактор колец

$$\frac{\mathbb{k}[t]}{(t - \lambda_1)^{m_1}} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{k}[t]}{(t - \lambda_s)^{m_s}}, \quad (11-6)$$

причём операторы умножения на  $t$  в прямых суммах

$$\frac{\mathbb{k}[t]}{(t - \nu_1)^{n_1}} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{k}[t]}{(t - \nu_r)^{n_r}} \quad \text{и} \quad \frac{\mathbb{k}[t]}{(t - \mu_1)^{m_1}} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{k}[t]}{(t - \mu_s)^{m_s}}$$

подобны, если и только если  $r = s$  и прямые слагаемые можно перенумеровать так, чтобы  $\mu_i = \nu_i$  и  $m_i = n_i$  при всех  $i$ . В фактор кольце  $\mathbb{k}[t]/((t - \lambda)^m)$  оператор умножения на  $t = \lambda + (t - \lambda)$  является суммой скалярного оператора  $\lambda E : f \mapsto \lambda f$  и нильпотентного оператора  $\eta : f \mapsto (t - \lambda) \cdot f$ , для которого многочлены  $(t - \lambda)^{m-1}, (t - \lambda)^{m-2}, \dots, (t - \lambda), 1$  образуют жорданову цепочку длины  $m$ . В базисе из этих многочленов умножение на  $t$  задаётся двудиagonalной  $m \times m$ -матрицей

$$J_m(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \quad (11-7)$$

в остальных местах которой стоят нули. Эта матрица называется *жордановой клеткой* размера  $m$  с собственным числом  $\lambda$ .

Следствие 11.7 (жорданова нормальная форма)

Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  для любого оператора  $F : V \rightarrow V$  в  $V$  существует базис, в котором матрица  $F$  имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{m_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} \quad (11-8)$$

по главной диагонали которого стоят жордановы клетки<sup>1</sup>  $J_{m_1}(\lambda_1), J_{m_2}(\lambda_2), \dots, J_{m_k}(\lambda_k)$  вида (11-7), а в остальных местах — нули. С точностью до перестановки блоков матрица (11-8) не зависит от выбора такого базиса. Два оператора подобны тогда и только тогда, когда их матрицы (11-8) отличаются друг от друга перестановкой блоков.  $\square$

Определение 11.2

Матрица (11-8) называется *жордановой нормальной формой* оператора  $F$ . Всякий базис пространства  $V$ , в котором матрица оператора  $F$  имеет жорданову нормальную форму, называется *жордановым базисом* оператора  $F$ .

**11.4.1. Корневое разложение.** Для произвольного оператора  $F : V \rightarrow V$  подмодуль  $(t - \lambda)$ -кращения в модуле  $V_F$  называется *корневым подпространством* оператора  $F$ , отвечающим собственному  $\lambda \in \text{Spes } F$  и обозначается

$$K_\lambda = \{v \in V \mid \exists m \in \mathbb{N} : (\lambda \text{Id} - F)^m v = 0\} = \bigcup_{m \geq 1} \ker(\lambda \text{Id} - F)^m = \ker(\lambda \text{Id} - F)^{m_\lambda}, \quad (11-9)$$

где  $m_\lambda$  — максимальный из показателей степеней элементарных делителей  $F$  вида  $(t - \lambda)^m$ . Каждое корневое подпространство  $K_\lambda$  содержит ненулевое собственное подпространство  $V_\lambda$  и тем самым отлично от нуля. Разложение  $\mathbb{k}[t]$ -модуля  $V_F$  в прямую сумму  $\mathbb{k}[t]$ -

<sup>1</sup>ещё раз отметим, что числа  $\lambda_i$  и  $m_i$  могут повторяться

подмодулей  $(t - \lambda)$ -кручения из [сл. 10.2](#) на стр. 159 имеет вид  $V = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec } F} K_\lambda$  и называется *корневым разложением* оператора  $F$ .

Упражнение 11.11. Получите корневое разложение как следствие [предл. 11.7](#) и тождества Гамильтона – Кэли без использования [сл. 10.2](#) и теоремы об элементарных делителях.

Количество жордановых клеток размера  $m$  с заданным собственным значением  $\lambda$  в жордановой нормальной форме оператора  $F$  равно количеству строк длины  $m$  в диаграмме Юнга  $\nu$  нильпотентного оператора  $(\lambda \text{Id} - F)|_{K_\lambda} : K_\lambda \rightarrow K_\lambda$ . Согласно форм. (11-4) на стр. 163 длина  $k$ -того столбца этой диаграммы равна

$$\nu_k^t = \dim \ker(\lambda \text{Id} - F)^k - \dim \ker(\lambda \text{Id} - F)^{k-1}. \quad (11-10)$$

Таким образом, для отыскания жордановой нормальной формы оператора  $F$  достаточно разложить характеристический многочлен  $\chi_F(t)$  на множители (??) и для каждого корня  $\lambda$  и натурального  $k$  в пределах  $1 \leq k \leq m_\lambda$  вычислить  $\dim \ker(\lambda \text{Id} - F)^k$ , после чего построить диаграмму Юнга  $\nu$  с длинами столбцов (11-10) и написать столько клеток  $J_\ell(\lambda)$ , сколько строк длины  $\ell$  имеется в диаграмме  $\nu$ .

**11.4.2. Перестановочные операторы.** Если линейные операторы  $F, G : V \rightarrow V$  на векторном пространстве  $V$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  коммутируют друг с другом:  $FG = GF$ , то ядро и образ любого многочлена от оператора  $F$  переводятся оператором  $G$  в себя, т. к.  $f(F)v = 0 \Rightarrow f(F)Gv = Gf(F)v = 0$  и  $v = f(F)w \Rightarrow Gv = Gf(F)w = f(F)Gw$ . В частности, собственные подпространства  $V_\lambda = \ker(F - \lambda E)$  и корневые подпространства  $K_\lambda = \bigcup_n \ker(\lambda \text{Id} - F)^n$  оператора  $F$  инвариантны относительно любого оператора  $G$ , перестановочного с  $F$ .

**Лемма 11.1**

Над алгебраически замкнутым полем любое множество коммутирующих операторов обладает общим собственным вектором. Над произвольным полем любое множество диагонализуемых коммутирующих операторов может быть диагонализировано одновременно в одном общем базисе.

*Доказательство.* Индукция по размерности пространства. Если она равна единице или если все операторы скалярны, то доказывать нечего — подойдут любой ненулевой вектор и, соответственно, любой базис. Если среди операторов есть нескаллярный, то его собственные подпространства имеют меньшую размерность и инвариантны для всех операторов, причём если операторы были диагонализуемы во всём пространстве, то их ограничения на инвариантные подпространства будут диагонализуемы на этих подпространствах (см. [сл. 11.6](#)). Применяя к собственным подпространствам предположение индукции, получаем требуемое.  $\square$

**Теорема 11.2 (разложение Жордана)**

Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  для каждого оператора  $F$  существует единственная пара операторов  $F_s$  и  $F_n$ , таких что  $F_n$  нильпотентен,  $F_s$  диагонализуем,  $F = F_s + F_n$  и  $F_s F_n = F_n F_s$ . Кроме того, операторы  $F_s$  и  $F_n$  являются многочленами с нулевым свободным членом от оператора  $F$ .

Доказательство. Представим  $F$  оператором умножения на  $t$  в прямой сумме фактор колец

$$\frac{\mathbb{k}[t]}{(t - \lambda_1)^{m_1}} \oplus \cdots \oplus \frac{\mathbb{k}[t]}{(t - \lambda_s)^{m_s}}, \quad (11-11)$$

и пусть<sup>1</sup>  $\text{Spes } F = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ . Для каждого  $i = 1, 2, \dots, r$  зафиксируем  $a_i \in \mathbb{N}$ , строго большее максимального показателя  $m_{\lambda_i}$ , с которыми  $(t - \lambda_i)$  встречается в (11-11). По китайской теореме об остатках существуют многочлены  $f_1, f_2, \dots, f_r \in \mathbb{k}[t]$ , такие что

$$f_\nu(t) \equiv \begin{cases} 1 \pmod{(t - \lambda_\nu)^{a_\nu}} \\ 0 \pmod{(t - \lambda_\mu)^{a_\mu}} \text{ при } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Если  $\lambda_\nu \neq 0$ , многочлен  $t$  обратим по модулю  $(t - \lambda_\nu)^{a_\nu}$ , и найдётся многочлен  $g_\nu(t)$ , такой что  $t \cdot g_\nu(t) \equiv \lambda_\nu \pmod{(t - \lambda_\nu)^{a_\nu}}$ . Для  $\lambda_\nu = 0$ , положим  $g_\nu = 0$ . Тогда при всех  $\nu$  многочлен

$$p_s(t) \stackrel{\text{def}}{=} t \sum_{\nu=1}^r g_\nu(t) f_\nu(t) \equiv \lambda_\nu \pmod{(t - \lambda_\nu)^{a_\nu}}$$

и не имеет свободного члена. Поэтому умножение на  $p_s(t)$  действует на каждом факторе  $\mathbb{k}[t]/(t - \lambda_\nu)^{m_\nu}$  из разложения (11-11) как умножение на  $\lambda_\nu$ . Тем самым, оператор  $F_s = p_s(F)$  диагонализуем. Оператор  $F_n = F - F_s$  действует на  $\mathbb{k}[t]/(t - \lambda_\nu)^{m_\nu}$  умножением на  $t - \lambda_\nu$  и, значит, нильпотентен. Будучи многочленами от  $F$ , операторы  $F_s$  и  $F_n$  перестановочны между собою и с  $F$ . Это доказывает существование операторов  $F_s, F_n$  и последнее утверждение.

Докажем единственность. Пусть есть ещё одно разложение  $F = F'_s + F'_n$ , удовлетворяющее условиям теоремы. Поскольку  $F'_s$  и  $F'_n$  перестановочны между собой, они перестановочны с  $F = F'_s + F'_n$ , а значит, и с построенными выше многочленами  $F_s, F_n$  от  $F$ . Поэтому каждое собственное подпространство  $V_\lambda$  оператора  $F_s$  переводится оператором  $F'_s$  в себя, и  $F'_s$  диагонализуем на  $V_\lambda$ . Если бы  $F'_s$  имел на  $V_\lambda$  собственный вектор  $v$  с собственным значением  $\mu \neq \lambda$ , то вектор  $v$  был бы собственным для оператора  $F_n - F'_n = F_s - F'_s$  с ненулевым собственным числом  $\lambda - \mu$ , что невозможно, т. к.  $F_n - F'_n$  нильпотентен.

Упражнение 11.12. Докажите это.

Следовательно  $F'_s|_{V_\lambda} = \lambda \text{Id}$ , откуда  $F'_s = F_s$  и  $F'_n = F - F'_s = F - F_s = F_n$ .  $\square$

Определение 11.3

Операторы  $F_s$  и  $F_n$  из теор. 11.2 называются, соответственно, *полупростой*<sup>2</sup> (или *диагонализуемой*) и *нильпотентной* составляющими оператора  $F$ .

Упражнение 11.13. Покажите, что если оператор  $F : V \rightarrow V$  переводит некоторое подпространство  $U \subset V$  в некоторое подпространство  $W \subset V$ , то его жордановы компоненты  $F_s$  и  $F_n$  тоже переводят  $U$  в  $W$ .

<sup>1</sup>напомню, что  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  это множество всех различных  $\lambda_i \in \mathbb{k}$ , встречающихся в (11-11)

<sup>2</sup>индекс «s» в обозначении  $F_s$  происходит от английского *semisimple*

**11.5. Функции от оператора.** Пусть основное поле  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$  и оператор  $F$  умножения на  $t$  в прямой сумме фактор колец

$$W = \frac{\mathbb{C}[t]}{(t - \lambda_1)^{s_1}} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{C}[t]}{(t - \lambda_r)^{s_r}} \quad (11-12)$$

имеет спектр<sup>1</sup>  $\text{Спес } F = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$  и минимальный многочлен  $\mu_F = \prod_{\lambda \in \text{Спес } F} (t - \lambda)^{m_\lambda}$ .

Назовём подалгебру  $\mathcal{C}$  в алгебре всех функций  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  *пригодной для вычисления* на операторе  $F$ , если  $\mathcal{C}$  содержит алгебру многочленов и любая функция  $f \in \mathcal{C}$  допускает при каждом  $\lambda \in \text{Спес } F$  представление в виде

$$f(z) = f(\lambda) + \frac{f'(\lambda)}{1!}(z - \lambda) + \dots + \frac{f^{(m_\lambda - 1)}(\lambda)}{(m_\lambda - 1)!}(z - \lambda)^{m_\lambda - 1} + g_\lambda(z) \cdot (z - \lambda)^{m_\lambda}, \quad (11-13)$$

где  $g_\lambda \in \mathcal{C}$ , а  $f^{(k)} = \frac{d^k f}{dz^k}$  означает  $k$ -тую производную. В **теор. 11.3** мы покажем, что существует единственный гомоморфизм алгебр

$$\text{ev}_F : \mathcal{C} \rightarrow \text{End}(W),$$

продолжающий гомоморфизм вычисления значений многочленов на операторе  $F$  на любую пригодную к вычислению на  $F$  алгебру функций  $\mathcal{C} \supset \mathbb{C}[z]$ . Для каждого подобного  $F$  оператора  $G = CFC^{-1} : U \rightarrow U$  на любом пространстве  $U$ , связанным с  $W$  изоморфизмом  $C : W \xrightarrow{\cong} U$ , положим по определению  $\text{ev}_G = \text{ev}_{CFC^{-1}} : f \mapsto C \circ \text{ev}_F(f) \circ C^{-1}$ .

**Пример 11.3**

Примером алгебры, пригодной для вычисления на данном операторе  $F$ , является алгебра  $\mathcal{C}$  всех функций  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , которые раскладываются в круговой окрестности каждой точки  $\lambda \in \text{Спес } F$  в абсолютно сходящийся в этой окрестности ряд Тейлора. Тем самым, любой линейный оператор  $G : V \rightarrow V$  можно подставить в любую функцию  $f \in \mathcal{C}$ . Например, для любого оператора  $F$ , спектр которого не содержит чисел вида  $2\pi ik$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , определён оператор  $\text{th}(F)$ . А если функция  $f(z)$  является суммой степенного ряда, сходящегося всюду в  $\mathbb{C}$ , то оператор  $f(F)$  определён вообще для каждого линейного оператора  $F : V \rightarrow V$  на любом конечномерном векторном пространстве  $V$ . В частности, для всех операторов  $F$  определены операторы  $e^F$ ,  $\sin F$ ,  $\text{ch } F$  и т. п.

**Теорема 11.3**

Пусть алгебра  $\mathcal{C} \supset \mathbb{C}[z]$  пригодна для вычисления на операторе  $F : W \rightarrow W$  умножения на  $t$  в прямой сумме (11-12). Тогда вычисление  $\text{ev}_F : \mathbb{C}[z] \rightarrow \text{End } W$  допускает единственное продолжение до гомоморфизма алгебр  $\text{ev}_F : \mathcal{C} \rightarrow \text{End } W$ . При этом  $\forall f \in \mathcal{C}$

$$\text{ev}_F(f) = P_{f,F}(F),$$

где  $P_{f,F}(z) \in \mathbb{C}[z]$  — многочлен, значение которого в каждой точке  $\lambda \in \text{Спес } F$  вместе со значениями начальных  $m_\lambda - 1$  производных те же, что у функции  $f$ :

$$P_{f,F}^{(k)}(\lambda) = f^{(k)}(\lambda) \quad \text{при всех } 0 \leq k \leq m_\lambda - 1.$$

(такой многочлен  $P_{f,F}$  единствен по модулю минимального многочлена  $\mu_F$  оператора  $F$ ).

<sup>1</sup>ещё раз напомним, что  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$  это все различные числа, присутствующие в (11-12), а  $m_\lambda = m_{t-\lambda}(F)$  это максимальный показатель, встречающийся в (11-12) у элементарных делителей вида  $(t - \lambda)^m$

Доказательство. Пусть искомое продолжение  $\text{ev}_F$  на алгебру  $\mathcal{C}$  существует. Зафиксируем произвольную функцию  $f \in \mathcal{C}$  и подставим  $z = F$  в соотношение (11-13). Получим

$$f(F) = f(\lambda) \cdot E + f'(\lambda) \cdot (F - \lambda E) + \dots + \frac{1}{(m_\lambda - 1)!} f^{(m_\lambda - 1)}(\lambda) (F - \lambda E)^{m_\lambda - 1} + g_\lambda(F) (F - \lambda E)^{m_\lambda}. \quad (11-14)$$

Поскольку  $(F - \lambda E)^m$  действует на прямой сумме фактор колец

$$W = \frac{\mathbb{C}[t]}{(t - \lambda_1)^{s_1}} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{C}[t]}{(t - \lambda_r)^{s_r}}$$

умножением на  $(t - \lambda)^m$ , последнее слагаемое в (11-14) аннулирует подмодуль  $(t - \lambda)$ -кручения<sup>1</sup>. Мы заключаем, что для каждого  $\lambda \in \text{Spec}(F)$  оператор  $f(F)$  переводит подмодуль  $(t - \lambda)$ -кручения в себя и действует на нём как оператор умножения на многочлен

$$f(\lambda) + f'(\lambda) \cdot (t - \lambda) + \dots + f^{(m_\lambda - 1)}(\lambda) \cdot (t - \lambda)^{m_\lambda - 1} / (m_\lambda - 1)! \quad (11-15)$$

По китайской теореме об остатках существует единственный класс  $[P_{f,F}] \in \mathbb{k}[t] / (\mu_F)$  сравнимый с многочленом (11-15) по модулю  $(t - \lambda)^{m_\lambda}$  сразу для всех  $\lambda \in \text{Spec } F$ , и действие оператора  $f(F)$  на всём пространстве  $W$  совпадает с действием оператора  $P_{f,F}(F)$ . Это доказывает единственность продолжения и последнее утверждение теоремы.

Проверим теперь, что правило  $f(F) \stackrel{\text{def}}{=} P_{f,F}(F)$  действительно задаёт гомоморфизм алгебр  $\mathcal{C} \rightarrow \text{End } W$ . Обозначим через  $s_\lambda^m : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}[t] / ((t - \lambda)^m)$  отображение, сопоставляющее функции  $f \in \mathcal{C}$  её  $(m - 1)$ -ю струю в точке  $\lambda \in \mathbb{C}$ :

$$s_\lambda^m f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\lambda) (t - \lambda)^k \pmod{(t - \lambda)^m}$$

и рассмотрим прямое произведение таких отображений по всем точкам  $\lambda \in \text{Spec } F$ :

$$s : \mathcal{C} \rightarrow \prod_{\lambda \in \text{Spec } F} \mathbb{C}[t] / ((t - \lambda)^{m_\lambda}) \simeq \mathbb{C}[t] / (\mu_F) \quad (11-16)$$

$$f \mapsto \left( s_{\lambda_1}^{m_{\lambda_1} - 1} f, \dots, s_{\lambda_r}^{m_{\lambda_r} - 1} f \right).$$

Упражнение 11.14. Проверьте, что отображение (11-16) является гомоморфизмом алгебр. Композиция гомоморфизма (11-16) с гомоморфизмом  $\text{ev}_F : \mathbb{C}[t] / (\mu_F) \rightarrow \text{End } W$  и является искомым гомоморфизмом вычисления.  $\square$

**11.5.1. Интерполяционный многочлен.** Многочлен  $P_{f,F} \in \mathbb{C}[z]$  значение которого на операторе  $F : V \rightarrow V$  равно значению функции  $f \in \mathcal{C}$  на этом операторе, называется *интерполяционным многочленом* для вычисления  $f(F)$ . Он зависит как от функции  $f$ , так и от оператора<sup>2</sup>  $F$  и определён однозначно по модулю минимального многочлена  $\mu_F$  оператора  $F$ . Если известно разложение характеристического многочлена оператора  $F$  в

<sup>1</sup>т. е. все слагаемые вида  $\mathbb{C}[t] / ((t - \lambda)^k)$

<sup>2</sup>в частности, значения  $f(F) = P_{f,F}(F)$  и  $f(G) = P_{f,G}(G)$  одной и той же функции  $f$  на разных операторах  $F$  и  $G$  получаются подстановкой этих операторов в *разные* интерполяционные многочлены  $P_{f,F} \not\equiv P_{f,G} \pmod{(\mu_F)}$

произведение степеней различных линейных двучленов:  $\chi_F = \prod_{\lambda \in \text{Спек } F} (t - \lambda)^{N_\lambda}$ , то в качестве  $P_{f,F}$  годится единственный многочлен степени  $\deg P_{f,F} < \deg \chi_F = \dim V$ , имеющий  $P_{f,F}^{(k)}(\lambda) = f^{(k)}(\lambda)$  для каждого  $\lambda \in \text{Спек } F$  при всех  $0 \leq k \leq N_\lambda - 1$ . Действительно, так как число  $N_\lambda$ , равное сумме показателей всех элементарных делителей  $(t - \lambda)^m \in \mathcal{E}l F$ , не меньше числа  $m_\lambda$ , равного максимальному из этих показателей, класс этого многочлена удовлетворяет условиям [теор. 11.3](#).

Пример 11.4 (степенная функция и рекуррентные уравнения)

Задачу отыскания  $n$ -того члена числовой последовательности  $z_n \in \mathbb{C}$ , удовлетворяющей рекуррентному уравнению  $m$ -того порядка  $z_n = \alpha_1 z_{n-1} + \alpha_2 z_{n-2} + \dots + \alpha_m z_{n-m}$ , если заданы её начальные  $m$  членов  $(a_0, a_1, \dots, a_{m-1})$ , сводится к задаче вычисления  $n$ -той степени  $m \times m$ -матрицы

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_m \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & \alpha_{m-1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

поскольку умножение фрагмента из  $m$  идущих подряд членов последовательности  $z_n$  справа на матрицу  $S$  приводит к сдвигу этого фрагмента на единицу вправо:

$$(z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_{k+m}) \cdot S = (z_{k+2}, z_{k+3}, \dots, z_{k+m+1}).$$

Таким образом,  $n$ -тый член последовательности  $z_n$  равен первой координате вектора

$$(a_0, a_1, \dots, a_{m-1}) \cdot S^n = (z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+m-1}).$$

Согласно [теор. 11.3](#)  $S^n = P_{f,F}(S)$ , где  $P_{f,F} \in \mathbb{C}[z]$  — интерполяционный многочлен для вычисления функции  $f(z) = z^n$  на матрице  $S$ .

Проиллюстрируем сказанное на примере матрицы  $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , задающей сдвиг в последовательности Фибоначчи<sup>1</sup>, что определяется уравнением  $z_n = z_{n-1} + z_{n-2}$ . Корни характеристического многочлена

$$\chi_S(t) = \det \begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & t-1 \end{pmatrix} = t^2 - t - 1 = (t - \lambda_+)(t - \lambda_-)$$

суть  $\lambda_\pm = (1 \pm \sqrt{5})/2$ . Значения функции  $f(z) = z^n$  на них суть  $f(\lambda_\pm) = \lambda_\pm^n$ . Коэффициенты интерполяционного многочлена  $P_{f,S}(t) = at + b$  находятся из уравнений

$$\begin{cases} a \lambda_+ + b = \lambda_+^n \\ a \lambda_- + b = \lambda_-^n \end{cases}$$

и равны  $a = (\lambda_+^n - \lambda_-^n)/(\lambda_+ - \lambda_-)$ ,  $b = \lambda_+^n - a \lambda_+ = (\lambda_+^{n-1} - \lambda_-^{n-1})(\lambda_+ - \lambda_-)$ . Таким образом,

$$S^n = aS + bE = \begin{pmatrix} b & a \\ a & a+b \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup>сравните это вычисление с проделанным ранее в [п° 4.3.1](#) на стр. 54

Для классического начала  $z_0 = 0, z_1 = 1$  получаем  $(z_n, z_{n+1}) = (0, 1) \cdot S^n = (a, a + b)$ , т. е.

$$z_n = a = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Отметим, что знание матрицы  $S^n$  позволяет без дополнительных вычислений находить  $n$ -тый член последовательности, удовлетворяющей тому же рекуррентному уравнению, но имеющей другое начало.

#### Предложение 11.9

Спектр оператора  $f(F)$  состоит из чисел  $f(\lambda)$  с  $\lambda \in \text{Спес } F$ . Если  $f'(\lambda) \neq 0$ , то элементарные делители  $(t - \lambda)^m \in \mathcal{E}\ell(F)$  биективно соответствуют элементарным делителям  $(t - f(\lambda))^m \in \mathcal{E}\ell(f(F))$  оператора  $f(F)$ . Если  $f'(\lambda) = 0$ , то элементарные делители вида  $(t - \lambda)^m \in \mathcal{E}\ell(F)$ , имеющие  $m > 1$ , распадаются в объединения элементарных делителей  $(t - f(\lambda))^\ell \in \mathcal{E}\ell(f(F))$ , имеющих  $\ell < m$ .

Доказательство. Из доказательства [теор. 11.3](#) вытекает, что диагональная и нильпотентная составляющие ограничения оператора  $f(F)$  на подмодуль  $(t - \lambda)$ -кручения равны, соответственно,  $f_s(F) = f(\lambda) \cdot \text{Id}$  и  $f_n(F) = f'(\lambda) \cdot \eta + \frac{1}{2} f''(\lambda) \cdot \eta^2 + \dots$ , где через  $\eta$  обозначен нильпотентный оператор умножения на  $(t - \lambda)$ . На каждом слагаемом  $\mathbb{C}[t]/((t - \lambda)^k)$  оператор  $\eta$  имеет ровно одну жорданову цепочку максимальной длины  $k$ . Если  $f'(\lambda) \neq 0$ , то  $f_n^{k-1}(F) = f'(\lambda)^{m-1} \cdot \eta^{k-1} \neq 0$ . Поэтому  $f_n(F)$  тоже имеет ровно одну жорданову цепочку длины  $k$ . При  $f'(\lambda) = 0$  и  $m > 1$  равенство  $f_n^m(F) = 0$  наступит при  $m < k$ , так что цикловой тип  $N$  будет состоять из нескольких жордановых цепочек.  $\square$

**11.5.2. Аналитический подход к распространению гомоморфизма вычисления многочленов на матрице  $F \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$  с алгебры  $\mathbb{C}[z]$  на большую алгебру функций  $\mathcal{C} \supset \mathbb{C}[z]$**  состоит в том, чтобы наделять пространства  $\mathbb{C}[z]$  и  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  той или иной топологией, представить функцию  $f \in \mathcal{C}$  как предел последовательности многочленов и определить  $f(F)$  как предел последовательности операторов  $f_n(F) \in \text{End}(V)$ , после чего проверить, что  $f(F)$  зависит только от  $f$ , а не от выбора сходящейся к  $f$  последовательности многочленов, а полученное отображение  $\text{ev}_F : \mathcal{C} \rightarrow \text{End } V$  является гомоморфизмом алгебр<sup>1</sup>. Однако, как бы ни определялась сходимость в пространстве функций и какой бы ни была сходящаяся к функции  $f$  последовательность многочленов  $f_n$ , последовательность операторов  $f_n(F)$  всегда лежит в конечномерном векторном пространстве, порождённом степенями  $F^m$  с  $0 \leq m < \dim V$ , и если переход к пределу в пространстве матриц перестановочен со сложением и умножением на константы<sup>2</sup>, то предел последовательности  $f_n(F)$  неминуемо будет *многочленом* от  $F$  степени, меньшей чем  $\dim V$ . Это означает, что какая бы аналитическая процедура не применялась для построения гомоморфизма  $\text{ev}_F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ , значение этого гомоморфизма на заданной функции  $f$  *a priori* вычисляется по [теор. 11.3](#).

<sup>1</sup> в качестве упражнения по анализу читателю настоятельно рекомендуется попробовать самостоятельно реализовать эту программу, используя на пространстве функций топологию, в которой сходимость последовательности функций означает равномерную сходимость в каждом круге в  $\mathbb{C}$ , а на пространстве  $\text{Mat}_n(\mathbb{C})$  — стандартную топологию пространства  $\mathbb{C}^{n^2}$ , где сходимость определяется по координатно

<sup>2</sup> т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda F_n + \mu G_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} F_n + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} G_n$



---

Отметим также, что если операторы  $F : V \rightarrow V$  и  $G : W \rightarrow W$  подобны, т. е.  $G = CFC^{-1}$  для некоторого изоморфизма  $C : V \simeq W$ , то и функции от них подобны:  $f(G) = Cf(F)C^{-1}$ , поскольку соотношение  $f_n(G) = Cf_n(F)C^{-1}$  выполнено для всех многочленов, приближающих функцию  $f$ , а стало быть, останется выполненным и в пределе, при условии, что топология на пространствах  $\text{End } V$  и  $\text{End } W$  такова, что все *линейные* отображения  $\text{End } V \rightarrow \text{End } W$  непрерывны.

## Ответы и указания к некоторым упражнениям

- Упр. 11.2. Пусть  $\mathbb{k}[t]/(t^n) = U \oplus W$ , где  $U$  и  $W$  переводятся в себя умножением на  $t$ . Оба этих подпространства не могут целиком содержаться в образе оператора умножения на  $t$  (иначе их сумма тоже бы в нём содержалась), поэтому в одном из них, скажем, в  $U$ , есть класс  $a \pmod{t^n}$ , где  $a \in \mathbb{k}$  отлично от нуля. Но тогда в  $U$  лежат все классы  $at^m \pmod{t^n}$  с  $0 \leq m \leq (n-1)$ , а они линейно порождают всё пространство  $\mathbb{k}[t]/(t^n)$ .
- Упр. 11.3. Если  $V = U \oplus W$ , где  $U$  и  $W$   $F$ -инвариантны, то  $V^* = \text{Ann } U \oplus \text{Ann } W$  и оба подпространства  $\text{Ann } U$  и  $\text{Ann } W$  будут  $F^*$ -инвариантны: скажем, если  $\xi \in \text{Ann } U$ , то  $\forall u \in U \langle F^*\xi, u \rangle = \langle \xi, Fu \rangle = 0$ , поскольку  $Fu \in U$ , и значит,  $F^*\xi \in \text{Ann } U$ . Обратная импликация получается по двойственности в силу изоморфизма  $V^{**} = V$ .
- Упр. 11.4. Так как любой вектор  $h \in H$  представляется в  $V$  как  $h = u + q + r$  с  $u \in U$ ,  $q \in Q$ ,  $r \in R$ , в  $U$  выполняется равенство  $h = \pi(h) = \pi(u) + \pi(r)$ , в котором  $\pi(u) = u \in U$  и  $\pi(r) \in W$ , т. е.  $U + W = H$ . Если  $u \in U \cap W$ , то  $u = \pi(r)$  для некоторого  $r \in R$ , и  $\pi(u - r) = \pi(u) - \pi(r) = u - u = 0$ , откуда  $u - r \in \ker \pi = Q$ , что возможно только при  $u = r = 0$ . Поэтому  $U \cap W = 0$ .
- Упр. 11.5. В согласованном с разложением в прямую сумму базисе матрица  $tE - F$  имеет блочно диагональный вид  $\begin{pmatrix} tE - G & 0 \\ 0 & tE - H \end{pmatrix}$ . С другой стороны, для любых матриц  $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{k})$ ,  $C \in \text{Mat}_m(\mathbb{k})$ ,  $B \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{k})$  определитель  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C$  согласно формуле для разложения определителя по первым  $n$  столбцам.
- Упр. 11.6. Пусть  $f = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$ . Напишите матрицу  $F$  оператора умножения на  $t$  в фактор кольце  $\mathbb{k}[x]/(f)$  в базисе из классов мономов  $t^{n-1}, t^{n-2}, \dots, t, 1$  и разложите  $\det(tE - F)$  по первому столбцу.
- Упр. 11.7. Поскольку умножение на произведение всех элементарных делителей полностью аннулирует прямую сумму форм. (11-1) на стр. 162, оператор  $\chi_F(F)$  нулевой для любого оператора  $F$  над любым полем  $\mathbb{k}$ . Поскольку теорема Гамильтона-Кэли для матрицы  $A$  представляет собою набор тождеств между многочленами с целыми коэффициентами от элементов матрицы  $A$ , достаточно убедиться в её справедливости для всех матриц с рациональными элементами, т. е. для любого оператора над полем  $\mathbb{Q}$ .
- Упр. 11.8. Если  $\lambda \in \text{Spec } F$  и  $g(\lambda) \neq 0$ , то  $g(F)$  действует на ненулевом собственном подпространстве  $V_\lambda$  умножением на ненулевое число  $g(\lambda)$ . Тем самым,  $g(F) \neq 0$ .
- Упр. 11.9. Над алгебраически замкнутым полем всякий многочлен имеющий только один корень 0 равен  $t^m$ . Поэтому  $\chi_F(t) = t^m$  и по теореме Гамильтона – Кэли  $F^m = 0$ .
- Упр. 11.11. Разложение характеристического многочлена оператора  $F$  в виде произведения степеней попарно разных линейных форм  $\chi_F(t) = \prod_{\lambda \in \text{Spec } F} (t - \lambda)^{N_\lambda}$  удовлетворяет условиям предл. 11.7 с  $q_i = (t - \lambda)^{N_\lambda}$ , а корневые подпространства  $K_\lambda = \ker(\lambda \text{Id} - F)^{N_\lambda}$ .
- Упр. 11.12. Если  $a^n = 0$ ,  $b^m = 0$  и  $ab = ba$ , то по формуле Ньютона  $(a + b)^{m+n-1} = 0$ .
- Упр. 11.14. Отображение (11-16) линейно. Равенство  $s(fg) = s(f)s(g)$  достаточно проверить отдельно для каждой струи  $s_\lambda^m$ . По формуле Лейбница  $(fg)^{(k)} = \sum_{\nu+\mu=k} \binom{k}{\nu} f^{(\nu)} g^{(\mu)}$ . Поэтому

имеют место следующие сравнения по  $\text{mod}(t - \lambda)^m$ :

$$\begin{aligned}
 s_{\lambda}^m(fg) &\equiv \sum_k \frac{(t - \lambda)^k}{k!} \sum_{\nu + \mu = k} \frac{k!}{\nu! \mu!} f^{(\nu)}(\lambda) g^{(\mu)}(\lambda) \equiv \\
 &\equiv \sum_k \sum_{\nu + \mu = k} \frac{f^{(\nu)}(\lambda)}{\nu!} (t - \lambda)^{\nu} \cdot \frac{g^{(\mu)}(\lambda)}{\mu!} (t - \lambda)^{\mu} \equiv s_{\lambda}^m(f) s_{\lambda}^m(g)
 \end{aligned}$$