Множества и отображения

A1◇1. Сколько подмножеств (включая $\varnothing$ и X) у множества X, состоящего из n элементов?

A1◇2. Выразите пересечение множеств через разность множеств. Можно ли выразить разность через пересечение и объединение?

A1◇3. Сколько разных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в словах **а)** урок **б)** курок **в)** колобок **г)** аа … абб … б (α букв а и β букв б) **д)** $б_1 б_1 \dots б_1 б_2 б_2 \dots б_2 \ \dots \ \dots \ \dots \ б_m б_m \dots б_m$ (β_k букв $б_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$)?

A1◇4. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые в выражениях **а)** $(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^2$ **б)** $(a + b + c)^3$ **в)** $(a + b)^n$ **г)** $(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n$.

A1◇5. Сколько имеется различных одночленов от n переменных полной степени[1] **а)** ровно d **б)** не больше d?

A1◇6. Цело ли число $1000!/(100!^{10})$?

A1◇7. Сколько имеется таких отображений из пятиэлементного множества в двухэлементное, чтобы у каждой точки было не менее двух прообразов?

A1◇8. Фиксируем $m, n \in \mathbb{N}$. Сколько решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$ **а)** в натуральных **б)** в целых неотрицательных числах x_i?

A1◇9. Фиксируем $m, n \in \mathbb{N}$. Сколько имеется отображений $\{1, 2, \dots, m\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ **а)** произвольных **б)** биективных **в)** возрастающих[2] **г)** инъективных **д)** неубывающих[3] **е)** сюрьективных неубывающих **ж)** сюрьективных?

A1◇10. Сколько всего диаграмм Юнга[4]: **а)** веса 6 **б)** веса 7, содержащих не более трёх строк? **в)** без ограничений на вес, но содержащих не более p строк и q столбцов?

A1◇11. Даны 4 попарно различных чашки, 4 неотличимых друг от друга стакана, 10 совершенно одинаковых кусков сахара и 7 соломинок всех цветов радуги. Сколькими способами можно разложить: **а)** соломинки по чашкам **б)** сахар по чашкам **в)** сахар по стаканам **г)** соломинки по стаканам?

A1◇12. Как изменятся ответы в предыдущей задаче, если потребовать, чтобы после раскладывания не оставалось пустых ёмкостей?

A1◇13. Стороны плоского проволочного правильного n-угольника раскрашивают в n цветов — каждую сторону в свой цвет. Сколько различных игрушек при этом получится?

A1◇14. Каждую грань **а)** кубика **б)** правильного тетраэдра красят одним из шести фиксированных цветов, так чтобы все грани получились разноцветные. Сколько различных игрушек можно получить таким образом?

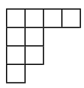
A1◇15* **(задача Л. Г. Макар-Лиманова)**. Торговец газировкой коротает время манипулируя пятнадцатью одноразовыми стаканчиками, сложенными перед ним в несколько стопок. Одна манипуляция заключается в том, что он берёт верхний стаканчик из каждой стопки и составляет из них новую стопку[5]. Как разложатся стаканчики после 1000 таких манипуляций?

---

[1] *полной степенью* одночлена $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$ называется сумма $m_1 + m_2 + \dots + m_n$

[2] отображение f называется *возрастающим*, если $\forall\, x_1, x_2 \ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

[3] отображение f называется *неубывающим*, если $\forall\, x_1, x_2 \ x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$

[4] *диаграмма Юнга* λ — это невозрастающая последовательность чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$; при этом $\ell(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} k$ называется *числом строк*, а $|\lambda| \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$ — *весом* диаграммы λ; диаграмма $\lambda = (4, 2, 2, 1)$ рисуется в виде 

[5] стопка может состоять и из единственного стакана, который в этом случае и будет верхним

Персональный табель ______________________________________ . Листок № 1 (4 сентября 2013)
(напишите свои фамилию, имя и отчество)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2			
3а			
б			
в			
г			
д			
4а			
б			
в			
г			
5а			
б			
6			
7			
8а			
б			
9а			
б			
в			
г			
д			
е			
ж			
10а			
б			
в			
11а			
б			
в			
г			
12			
13			
14а			
б			
15			