Векторные пространства

А6◇1. Линейно зависимы ли в пространстве функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ наборы **а)** $1, \sin x, \sin^2 x, \cdots, \sin^m x$ **б)** $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_m x}$ **в)** $1, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx$ **г)** $x^{\lambda_1}, \dots, x^{\lambda_m}$ ($\lambda_i \in \mathbb{R}$ все различны)

А6◇2. Линейно зависимы ли в пространстве функций $\mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ над полем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ наборы **а)** $x, x^2, \dots, x^{p+1}$ **б)** $x^p, x^{p^2}, \cdots, x^{p^p}$?

А6◇3. Может ли поле из 27 элементов содержать подполе из 9 элементов?

А6◇4. В пространстве V векторы $u_1, u_2, \dots, u_k$ линейно независимы, а векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ таковы, что при каждом $i = 1, 2, \dots, k$ векторы $e_1, \dots, e_{i-1}, u_i, e_{i+1}, \dots, e_n$ образуют базис. Верно ли, что все наборы $u_1, \dots, u_i, e_{i+1}, \dots, e_n$ являются базисами?

А6◇5. Приведите пример конечномерного пространства W и трёх попарно трансверсальных подпространств $U, V, T \subset W$, таких что $\dim U + \dim V + \dim T = \dim W$, но $W \neq U \oplus V \oplus T$.

А6◇6. Пусть $\dim(U + V) = \dim(U \cap V) + 1$ для некоторых подпространств $U, V \subset V$. Обязательно ли $U + V$ равно одному из подпространств U, V, а $U \cap V$ — другому?

А6◇7. Пусть k-мерные подпространства $W_1, W_2, \dots, W_m \subset V$ таковы, что $\dim W_i \cap W_j = k - 1$ для любых $i \neq j$. Покажите, что существует либо $(k-1)$-мерное подпространство $U \subset V$, содержащееся во всех W_i, либо $(k+1)$-мерное подпространство $W \subset V$, содержащее все W_i.

А6◇8. Найдите размерность пространства **а)** многочленов степени $\leqslant n$ от m переменных **б)** однородных многочленов степени d от m переменных **в)** однородных симметрических[1] многочленов степени 10 от 4 переменных **г)** симметрических многочленов степени $\leqslant 3$ от 4 переменных.

А6◇9. Какова размерность пространства многочленов $f \in \mathbb{R}[x]$ степени $\leqslant n$, обращающихся в нуль в точке $(3 - 2i) \in \mathbb{C}$?

А6◇10. Образуют ли базис в пространстве многочленов от x степени $\leqslant n$ с рациональными коэффициентами многочлены **а)** $(x-k)^n$ **б)** $\binom{x}{k}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$

А6◇11 (пространство подмножеств). Обозначим через $\mathcal{S}(M)$ множество всех подмножеств данного множества M. Покажите, что $\mathcal{S}(M)$ является векторным пространством над полем $\mathbb{F}_2$ относительно операций $X + Y \stackrel{\text{def}}{=} (X \cup Y) \smallsetminus (X \cap Y)$, $1 \cdot X \stackrel{\text{def}}{=} X$, и $0 \cdot X \stackrel{\text{def}}{=} \varnothing$. Для m-элементного множества M найдите $\dim \mathcal{S}(M)$ и укажите в $\mathcal{S}(M)$ какой-нибудь базис.

А6◇12 (конечные пространства). Сколько всего имеется в d-мерном векторном пространстве над конечным полем из q элементов **а)** векторов **б)** упорядоченных наборов из k линейно независимых векторов **в)** k-мерных векторных подпространств?

А6◇13 (гауссовы биномиальные коэффициенты). Обозначим через $\binom{d}{k}_q$ рациональную функцию от переменной q, дающую ответ к зад. А6◇12в). Найдите $\lim\limits_{q \to 1} \binom{d}{k}_q$.

А6◇14. Пусть $\dim U = n$, $\dim W = m$ и $U_0 \subset U$ и $W_0 \subset W$ — подпространства размерностей n_0 и m_0. Покажите, что линейные отображения $F : U \to W$ с $\ker F \subset U_0$ и $\operatorname{im} F \subset W_0$ образуют в $\operatorname{Hom}(U, W)$ векторное подпространство, и найдите его размерность.

А6◇15. Для любых линейных операторов $F, G : V \to V$ докажите включения **а)** $\ker(FG) \subset \ker(G)$ **б)** $\operatorname{im}(FG) \subset \operatorname{im}(F)$ и приведите (конечномерные) примеры, где оба этих включения строгие.

А6◇16. Для любого линейного оператора $F : V \to V$ $(\dim V < \infty)$ докажите импликации:
а) $\ker(F^k) = \ker(F^{k+1}) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \ker(F^k) = \ker(F^{k+n})$
б) $\operatorname{im}(F^k) = \operatorname{im}(F^{k+1}) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \operatorname{im}(F^k) = \operatorname{im}(F^{k+n})$

А6◇17 (проекторы). Пусть нетождественный оператор $F : V \to V$ имеет $F^2 = F$. Положим $V_0 = \ker F$ и $V_1 = \ker(F - \mathrm{Id}_V)$. Покажите, что $V = V_0 \oplus V_1$ и F проектирует V на V_1 вдоль V_0.

---

[1] многочлен от m переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$ называется *симметрическим*, если он не меняется при любой перестановке номеров переменных; например, многочлен $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 \in \Bbbk[x_1, x_2, x_3]$ симметрический, а многочлен $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ — нет

Персональный табель ____. Листок №6 (30 октября 2013)
(напишите свои фамилию, имя и отчество)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
г			
2а			
б			
3			
4			
5			
6			
7			
8а			
б			
в			
г			
9			
10а			
б			
11			
12а			
б			
в			
13			
14			
15а			
б			
16а			
б			
17			