

Матрицы

- A7◊1. В \mathbb{Q}^4 найдите размерность и какой-либо базис у суммы и пересечения подпространств:
- а) $\text{Span}((1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (1, 3, 1, 3))$ и $\text{Span}((1, 2, 0, 2), (1, 2, 1, 2), (3, 1, 3, 1))$
 - б) $\text{Span}((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1))$ и $\text{Ann}((1, 0, 1, 0), (0, 2, 1, 1), (1, 2, 1, 2))$
 - в) $\text{Ann}((1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1))$ и $\text{Ann}((1, 2, 0, 2), (1, 2, 1, 2), (3, 1, 3, 1))$
- A7◊2. Выясните, является ли сумма подпространств $U, W \subset \mathbb{K}^n$ прямой, и если да, найдите проекции стандартных базисных векторов \mathbb{K}^n на каждое из подпространств вдоль другого.
- а) U задано уравнением $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$, а W — системой $x_1 = x_2 = \dots = x_n$
 - б) $U = \text{Span}((1, 1, 1, 1), (-1, -2, 0, 1))$, $W = \text{Span}((-1, -1, 1, -1), (2, 2, 0, 1))$ в \mathbb{Q}^4 .
- A7◊3. На какую матрицу и с какой стороны надо умножить прямоугольную матрицу, чтобы
- а) её i -тая и j -тая строки поменялись местами
 - б) её i -тая строка умножилась на λ
 - в) к её i -той строке прибавилась j -тая, умноженная на λ
 - г) то же, но со столбцами.
- A7◊4 (теорема о ранге). Покажите, что у любой матрицы $A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ размерность линейной оболочки её строк в \mathbb{K}^n равна размерности линейной оболочки её столбцов¹ в \mathbb{K}^m .
- A7◊5. Покажите, что каждая матрица ранга 1
- а) является произведением столбца на строку
 - б) пропорциональна своему квадрату, буде она квадратная.
- A7◊6. Докажите для любых матриц $A \in \text{Mat}_{k \times \ell}$, $B \in \text{Mat}_{\ell \times m}$, $C \in \text{Mat}_{m \times n}$ неравенства:
- а) $\text{rk}(AB) \leq \min(\text{rk} A, \text{rk} B)$
 - б) $\text{rk}(AB) + \text{rk}(BC) \leq \text{rk}(ABC) + \text{rk}(B)$
 - в) $\text{rk}(A) + \text{rk}(B) \leq \text{rk}(AB) + \ell$.
- A7◊7. Есть 7 одинаковых банок, каждая на $\frac{1}{10}$ заполнена краской одного из семи цветов радуги². Можно ли переливая краску из банки в банку и равномерно размешивая содержимое получить хоть в одной из банок колер, в котором все 7 красок смешаны в равной пропорции?
- A7◊8 (коммутатор). Разность $[A, B] = AB - BA$ называется *коммутатором* квадратных матриц $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$. Докажите, что для любых $A, B, C \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ выполняются *правила Лейбница*:
- а) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$
 - б) $[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]]$.
- A7◊9. Выразите $(A + B)^n$ через $A^i B^j$, если
- а) $[A, B] = 0$
 - б) $[A, B] = B$
 - в) $[A, B] = A$.
- A7◊10* (лемма Барта). Пусть $\text{rk}[A, B] = 1$. Покажите, что у A и B есть общий собственный вектор³.
- A7◊11 (след). Сумма диагональных элементов $\text{tr} A \stackrel{\text{def}}{=} \sum a_{ii}$ называется *следом* квадратной матрицы A . Покажите, что
- а) $\forall A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{K}) \text{tr}[A, B] = 0$
 - б) $\forall A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ и $\forall C \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \text{tr}(C^{-1}AC) = \text{tr}(A)$
 - в) если $\text{tr}(AX) = 0 \forall X \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ с $\text{tr} X = 0$, то $A = \lambda E$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{K}$.
- A7◊12 (нильпотентные матрицы). Матрица $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K})$ называется *нильпотентной*, если $A^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Покажите, что если A нильпотентна, то матрицы $E \pm A$ обратимы.
- A7◊13. Нильпотентна ли сумма $A + B$ нильпотентных матриц A и B ? Докажите, что да, если
- а) $[A, B] = 0$
 - б) $[A, [A, B]] = [B, [B, A]] = 0$.
- A7◊14. Решите в $\text{Mat}_2(\mathbb{K})$ уравнения
- а) $X^2 = 0$
 - б) $X^3 = 0$
 - в) $X^2 = X$
 - г) $X^2 = E$
 - д) $X^2 = -E$.
- A7◊15. Пусть матрица A диагональна, и все её диагональные элементы различны. Покажите, что любая матрица, коммутирующая с A , имеет вид $f(A)$ для некоторого $f(x) \in \mathbb{K}[x]$.
- A7◊16. Покажите, что $\forall A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K}) \exists f \in \mathbb{K}[x] : f(A) = 0$.
- A7◊17. Для ненулевого $a \in \mathbb{C}$ вычислите:
- а) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$
 - б) $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{-1}$
 - в) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{-1}$.
- A7◊18. Напишите явную формулу для (ij) -того элемента матрицы, обратной к верхнетреугольной матрице (h_{ij}) с единицами по главной диагонали⁴.
- A7◊19. Пусть квадратные матрицы A, B, C, D обратимы. Явно вычислите $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}$.

¹эти размерности называются *рангом* и обозначается $\text{rk} A$

²в каждой банке — свой цвет и все цвета разные

³т. е. такой столбец $v \in \mathbb{C}^n$, что $Av = \lambda v$ и $Bv = \mu v$ для некоторых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ (мы считаем, что $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$)

⁴найдите ответ, пригодный и для матриц с элементами из *некоммутативного* кольца

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
в			
2а			
б			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			