Алгебра 3

И.В. Аржанцев и С.Н. Федотов
Независимый Московский университет
осень 2013

Задачи к лекции 1

Задача 1. a) Докажите, что любое конечное подмножество $Z \subseteq \mathbb{K}^n$ является алгебраическим подмножеством.

b) Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ и $Z = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{K}^1$ – подмножество целых чисел. Покажите, что Z не является алгебраическим подмножеством.

c) Докажите, что $Z = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = \sin x_1\}$ не является алгебраическим подмножеством в $\mathbb{R}^2$.

Задача 2. Задайте полиномиальными уравнениями объединение трех координатных прямых в $\mathbb{K}^3$.

Задача 3. Пусть $\mathbb{K}$ – бесконечное поле. Приведите пример бесконечного алгебраического подмножества $Z \subseteq \mathbb{K}^2$, для которого алгебра $\mathbb{K}[Z]$ содержит непостоянные обратимые функции.

Задача 4. Пусть $\mathbb{K}$ – бесконечное поле. Рассмотрим идеал

$$I = \{\, f(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid f(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha) = 0 \text{ для всех } \alpha \in \mathbb{K} \,\}$$

в кольце $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]$. Найдите конечный базис этого идеала.

Задача 5. Пусть $\mathbb{K}$ – произвольное поле. Докажите, что

a) алгебра рациональных функций

$$A = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f, g \in \mathbb{K}[x],\ g(0) \neq 0 \right\}$$

является нетеровой, но не конечно порожденной;

b) подалгебра B в $\mathbb{K}[x, y]$, порожденная одночленами $x, xy, xy^2, xy^3, \ldots$, не является нетеровой.

Задача 6. Рассмотрим кривую $Z = \{(t^3, t^4, t^5) \mid t \in \mathbb{C}\,\}$ в $\mathbb{C}^3$.

a) Найдите $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$, для которых $Z = Z(f_1, f_2, f_3)$.

b) Докажите, что идеал $I(Z)$ не может быть порожден двумя элементами.

Задача 7. Докажите, что для поля $\mathbb{K}$ следующие условия эквивалентны:

(a) $\mathbb{K}$ не является алгебраически замкнутым;

(b) для любого натурального n и любых многочленов $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ найдется такой $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, что $Z(f_1, \ldots, f_k) = Z(f)$.