Алгебра 3

И.В. Аржанцев и С.Н. Федотов
Независимый Московский университет
осень 2013

Задачи к лекции 10

Задача 1. Пусть X – аффинное многообразие и $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{K}[X]$ – такие алгебраически независимые функции, что для любой функции $f \in \mathbb{K}[X]$ набор $\{f_1, \dots, f_k, f\}$ алгебраически зависим. Докажите, что $k \le \dim X$ и приведите пример, показывающий, что неравенство может быть строгим.

Задача 2. Пусть X и Y – неприводимые аффинные многообразия. Опишите все морфизмы $\tau_1 \colon X \to S$ и $\tau_2 \colon Y \to S$, для которых

$$\dim X \times_S Y = \dim X + \dim Y.$$

Задача 3. Найдите размерность подмногообразия X всех матриц ранга не выше 1 в $\mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$.

Задача 4. Пусть X – нетерово топологическое пространство. Определим его размерность Крулля как максимальное значение d, для которого существует цепь

$$X_d \subsetneqq \ldots \subsetneqq X_2 \subsetneqq X_1 \subsetneqq X,$$

неприводимых замкнутых подмножеств. Докажите, что если X – аффинное многообразие, то его размерность Крулля совпадает с $\dim X$.

Задача 5. Пусть $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I$, где $I = (f_1, \dots, f_k)$, и известно, что идеал I прост. Укажите алгоритм, вычисляющий степень трансцендентности алгебры A.

Задача 6. Приведите пример неприводимого аффинного многообразия X размерности 1, которое не может быть реализовано как замкнутое подмногообразие в $\mathbb{A}^2$.

Задача 7. Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраически замкнутое поле и A – конечнопорожденная $\mathbb{K}$-алгебра.

a) Докажите, что следующие условия эквивалентны.
   1) Алгебра A локальна, т.е. содержит единственный максимальный идеал.
   2) Алгебра A изоморфна
   $$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/(x_1^{m_1}, \dots, x_n^{m_n}, f_1, \dots, f_k)$$
   для некоторых $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ и $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $f_i(0, \dots, 0) = 0$.
   3) Каждый элемент в A либо обратим, либо нильпотентен.

b) Докажите, что локальная алгебра конечномерна как $\mathbb{K}$-векторное пространство.

c) Классифицируйте с точностью до изоморфизма локальные алгебры $\mathbb{K}$-размерности 2 и 3.