Алгебра 3

И.В. Аржанцев и С.Н. Федотов
Независимый Московский университет
осень 2013

Задачи к лекции 2

Задача 1. Докажите, что радикал главного идеала в факториальном кольце является главным идеалом. Верно ли это утверждение в произвольном кольце?

Задача 2. Найдите радикал идеала $(x_1^3, x_2^2 + x_3^2, x_2x_3)$ в кольце $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$ для произвольного поля $\mathbb{K}$. (Обратите внимание на характеристику 2.)

Задача 3. Пусть R – кольцо и $I \subseteq R$ – идеал. Для любого $k > 0$ определим I^k как идеал в R, порожденный всеми элементами вида $a_1a_2 \ldots a_k$, где $a_i \in I$. Докажите, что если R нетерово, то для любого идеала I найдется такое $k > 0$, что $\operatorname{rad}(I)^k$ содержится в I.

Задача 4. Пусть R – кольцо и $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m \in R[x]$. Докажите, что

a) если $a \in R$ обратим и $b \in R$ нильпотентен, то $a + b$ обратим в R;
b) $f(x)$ нильпотентен тогда и только тогда, когда все $a_0, a_1, \ldots, a_m$ нильпотентны;
c) $f(x)$ обратим в $R[x]$ тогда и только тогда, когда a_0 обратим в R и $a_1, \ldots, a_m$ нильпотентны;
d) $f(x)$ – делитель нуля в $R[x]$ тогда и только тогда, когда существует такое $0 \neq a \in R$, что $af(x) = 0$.

Задача 5. Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраически замкнутое поле, $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ – идеал и $Z = Z(I) \subseteq \mathbb{A}^n$ – соответствующее алгебраическое подмножество. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

a) подмножество Z конечно;
b) $\mathbb{K}$-алгебра $A := \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/I$ конечномерна как $\mathbb{K}$-векторное пространство;
c) любая убывающая цепочка идеалов $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$ в A стабилизируется.

Задача 6. Пусть $C[0, 1]$ – это $\mathbb{R}$-алгебра всех непрерывных $\mathbb{R}$-значных функций на отрезке $[0, 1]$. Опишите все гомоморфизмы $\mathbb{R}$-алгебр

a) $C[0, 1] \to \mathbb{R}$;
b) $C[0, 1] \to \mathbb{C}$.

Задача 7. Докажите, что кольцо

$$R = \left\{ \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \mid f, g \in \mathbb{K}[x, y],\ g(0, 0) \neq 0 \right\}$$

не является кольцом Джекобсона.