Алгебра 3

И.В. Аржанцев и С.Н. Федотов
Независимый Московский университет
осень 2013

Задачи к лекции 3

Задача 1. Пусть $X = Z(x_1x_2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2$. Существует ли

a) сюръективный морфизм $X \to \mathbb{A}^1$;
b) доминантный морфизм $\mathbb{A}^1 \to X$?

Задача 2. Пусть X – топологическое пространство. Докажите, что

a) если $X' \subseteq X$ – плотное подмножество, то X неприводимо тогда и только тогда, когда X' неприводимо в индуцированной топологии;
b) если $\phi\colon X \to Y$ – непрерывное отображение топологических пространств и X неприводимо, то образ $\phi(X)$ неприводим в индуцированной топологии.

Задача 3. Пусть X и Y – топологические пространства. Топология произведения на $X \times Y$ определяется условием: подмножества вида $U \times V$, где $U \subseteq X$ и $V \subseteq Y$ пробегают все открытые подмножества, образуют базис этой топологии. Докажите, что топология Зарисского на $\mathbb{A}^2$ не совпадает с произведением топологий Зарисского на $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$.

Задача 4. Рассмотрим проекцию $\phi\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1$, $\phi(x_1, x_2) = x_1$. Является ли морфизм ϕ

a) замкнутым;
b) открытым?

Задача 5. Пусть X – аффинное алгебраическое многообразие. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

a) многообразие X несвязно в топологии Зарисского;
b) найдутся такие ненулевые идеалы $A, B \subseteq \mathbb{K}[X]$, что $\mathbb{K}[X] = A \oplus B$;
c) найдется такой элемент $f \in \mathbb{K}[X]$, что $f \neq 0, 1$ и $f^2 = f$.

Задача 6. Пусть $\phi\colon X \to Y$ – морфизм аффинных алгебраических многообразий.

a) Докажите, что ϕ сюръективен тогда и только тогда, когда для любого максимального идеала $J \subseteq \mathbb{K}[Y]$ идеал $(\phi^*(J)) \subseteq \mathbb{K}[X]$ не совпадает со всем кольцом.
b) Предположим, что морфизм ϕ доминантен и существует $\phi^*(\mathbb{K}[Y])$-подмодуль M в $\mathbb{K}[X]$, для которого $\mathbb{K}[X] = \phi^*(\mathbb{K}[Y]) \oplus M$. Докажите, что ϕ сюръективен.
c) Покажите на примере, что утверждение, обратное к b), неверно.

Задача 7. Для любого натурального n приведите пример морфизма $\phi\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1$, который имеет ровно n приводимых слоев.

Задача 8. Рассмотрим алгебраические подмножества

$$Z_1 = Z(x_1x_2(x_1 - x_2)) \subseteq \mathbb{A}^2 \quad \text{и} \quad Z_2 = Z(x_1x_2,\, x_1x_3,\, x_2x_3) \subseteq \mathbb{A}^3.$$

Изоморфны ли они?