Алгебра 3

И.В. Аржанцев и С.Н. Федотов
Независимый Московский университет
осень 2013

Задачи к лекции 4

Задача 1. Пусть $\mathbb{K}$ – произвольное поле и $R = \mathbb{K}[x, y, z]/(x^2 - yz)$. Докажите, что классы элементов x, y, z в R являются неприводимыми, но не простыми.

Задача 2. Пусть $\mathbb{K}$ – произвольное поле и $R = \mathbb{K}[x, y]$. Приведите пример идеала I в R, для которого идеал $\mathrm{rad}(I)$ прост, но идеал I не примарен.

Задача 3. Идеал I кольца R называется *неприводимым*, если для любых идеалов I_1, I_2 в R условие $I = I_1 \cap I_2$ влечет $I = I_1$ или $I = I_2$. Предположим, что R нетерово. Докажите, что

(a) каждый идеал в R есть пересечение конечного числа неприводимых идеалов;
(b) каждый неприводимый идеал в R примарен;
(c) каждый идеал в R есть пересечение конечного числа примарных идеалов с попарно различными радикалами.

Задача 4. Пусть $\mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{C})$ – пространство матриц размера $n \times m$ и $X_r \subseteq \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{C})$ – подмножество матриц ранга не выше r. Докажите, что X_r – неприводимое алгебраическое подмножество в $\mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{C})$.

Задача 5. Докажите, что при $n \geq 2$

a) лексикографический порядок $\preceq_{lex}$;
b) однородный лексикографический порядок $\preceq_{dlex}$

на $\mathcal{M}_n$ не совпадает с весовым порядком $\preceq_\omega$ для любого вектора весов $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$.

Задача 6. Пусть $I = (x_1^2 + x_2x_3,\ x_2^2x_3^3 + x_3^6)$. Найдите два различных мономиальных порядка $\preceq$ и $\preceq'$ на $\mathcal{M}_3$, для которых идеалы старших членов $\mathrm{in}_{\preceq}(I)$ и $\mathrm{in}_{\preceq'}(I)$ совпадают.